Politechnika Warszawska
Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych
Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej

ROZPRAWA DOKTORSKA

mgr inż. Sylwester Laskowski

Wspomaganie procesu ustalania cen detalicznych i negocjacji stawek rozliczeniowych na konkurencyjnym rynku usług telekomunikacyjnych

Promotor:
prof. dr hab. inż. Andrzej P. Wierzbicki

Warszawa, wrzesień 2004.

Rodzicom – Mirosławie i Stanisławowi Laskowskim

Podziękowania

Rzecz zaczyna się na gruncie opatrznościowego spotkania z dwoma dziewczętami - Kamilą Rzeźnicką i Anną Wojdą (Lasota), które w owym czasie rozpoczynały prace nad doktoratem z chemii. Za ich to namową, jeszcze przed obroną pracy magisterskiej, dotyczącej zagadnień projektowania bezprzewodowych sieci lokalnych ATM poprosiłem profesora Andrzeja Wierzbickiego, by zechciał twórczo pokierować moim zainteresowaniem zagadnieniami negocjacji. To pierwszy z doniosłych momentów, w którym życzliwość i cenne rady Profesora pozwalają mi odnaleźć strategiczne kierunki rozwoju pracy. W utrzymaniu tych kierunków pomocną wielce była życzliwość opiekuna doktorantów na Wydziale Elektroniki i Technik Informacyjnych Politechniki Warszawskiej profesora Andrzeja Kraśniewskiego, okazującego wiele wyrozumiałości dla rozmaitych komplikacji, wynikających z moich równoległych studiów na Akademii Muzycznej. W szczegółowych zagadnieniach niniejszej rozprawy odnaleźć można owoc rozmów z dwoma moimi kolegami (ówcześnie doktorantami) Krzysztofem Fleszarem i Pawłem Kuklikiem. Godny szczególnej uwagi jest również wkład Magdaleny Szczepańskiej, magister filologii klasycznej, która ujęta opowieściami na temat teorii gier nie omieszkała stać się moją żoną. Jeśli język niniejszej rozprawy w czymkolwiek odbiega od przyjętej konwencji, to jest to wynikiem mojego przeoczenia, którejś z jej sugestii.

Im wszystkim - serdecznie dziękuję. Niech Wam dobry Bóg błogosławi!

Wstęp

Najbardziej kluczowy problem, związany nieodłącznie z tematyką połączeń międzyoperatorskich (*interconnection*) skupia się wokół zagadnienia wysokości opłat, jakie ponosić muszą jedni operatorzy na rzecz drugich w związku z korzystaniem z oferowanych przez nich zasobów sieciowych. Problem ten jest jedną z najbardziej istotnych przeszkód w procesie liberalizacji rynku telekomunikacyjnego i promowaniu konkurencyjnych zasad jego funkcjonowania. Jeśli z uwagą przyjrzymy się wysiłkom podejmowanym przez odpowiedzialne za ten sektor organy regulacyjne, czy to na poziomie krajowym, czy na poziomie Unii Europejskiej, jeśli prześledzimy rozwój oferowanych przez nie propozycji, to powyższa teza wyda nam się niewątpliwie słuszna.

Historia ukazuje nam szereg ciekawych, mniej lub bardziej trafnych propozycji rozwiązania problemu wzajemnych rozliczeń między operatorami. Rozpoczynając - paradoksalnie - od metody „bill and keep", kiedy to operatorzy całkowicie rezygnują ze wzajemnych rozliczeń zachowując w całości dla siebie dochody czerpane od abonentów, poprzez metodę wspólnego wykorzystania środków, w oparciu o którą operatorzy łączą swoje przychody, a następnie ponownie je rozdzielają w zależności od wielkości poniesionych kosztów na wyświadczenie poszczególnych usług, czy po prostu na zasadzie procentowego podziału, dochodzimy wreszcie do metod ustalania kwoty za jednostkę czasu połączenia lub przekazywanej informacji, przy czym sugeruje się, by stawki te opierały się na kosztach ponoszonych na rzecz świadczonych usług, a w przypadku nieznajomości tychże kosztów, by były podobnej wysokości, co stawki ustalone przez innych operatorów o zbliżonej strukturze sieci i otoczeniu rynkowym, posiadających informacje o ponoszonych przez siebie kosztach - tzw. *benchmarking*.

Spojrzenie na problem wysokości stawek rozliczeniowych od strony wielkości ponoszonych przez operatorów kosztów jest podejściem niewątpliwie słusznym. W okresie przejściowym procesu kształtowania się konkurencji na rynku telekomunikacyjnym nakaz ustalania stawek rozliczeniowych w oparciu o ponoszone koszty zabezpiecza ten rynek przed nadmiernym wykorzystywaniem siły rynkowej przez dominujących operatorów. Jednakże w sytuacji dostatecznie rozwiniętej konkurencji na rynku, przy całym bogactwie możliwych strategii i celów, jakie wyznaczali będą sobie poszczególni operatorzy, opieranie wysokości stawek rozliczeniowych wyłącznie na wielkości ponoszonych kosztów jest podejściem zbyt uproszczonym.

Stąd rodzi się potrzeba spojrzenia na to zagadnienie również od strony popytu na usługi telekomunikacyjne i zbadaniu, jak wpływają poszczególne ceny na wielkość generowanego w sieci ruchu, a poprzez to, na różne strategiczne cele, wyznaczane przez przedsiębiorstwa telekomunikacyjne. Spojrzenie to, by było wyczerpującym, nie może ograniczać się wyłącznie do zagadnienia cen na rynku hurtowym, ale musi być powiązane z tematyką cen na rynku detalicznym (opłat taryfikacyjnych). Istnieje zatem potrzeba stworzenia całościowego modelu sytuacji gry rynkowej oraz odpowiednich metod jego analizy, jak również narzędzi wspomagających proces podejmowania decyzji, służących realizacji zamierzonych celów dla różnych scenariuszy gry.

O ile model popytu jest obrazem rzeczywystości wspólnej dla wszystkich operatorów - obrazem zachowań ludzkich w obliczu zmieniających się czynników ekonomicznych, o tyle model kosztów świadczenia usług jest obrazem rzeczywistości charakterystycznej dla danego operatora. W szczególnych, wcale nie rzadkich sytuacjach rzeczywistość ta nie musi być znana. Innymi słowy, poszczególni operatorzy mogą, lecz nie muszą znać modeli kosztów operatorów konkurencyjnych.

Cel i teza pracy

Praca stawia sobie za cel dostarczenie użytecznych narzędzi, wpierających przedsiębiorstwa telekomunikacyjne w procesie ustalania cen za świadczone przez nie usługi. Z racji na złożoność i szerokość zagadnienia uwaga skupiona została na szczególnym przypadku, kiedy to strategiczny cel przedsiębiorstwa wyrażony jest w formie pojedynczego kryterium oceny (np. maksymalizacja zysku) oraz nieznane są modele kosztów konkurentów i ich strategiczne cele.

Podstawowe tezy pracy sformułować można następująco:

- Analiza konkurencyjna rynku usług telekomunikacyjnych może dać lepsze rezultaty w procesie ustalania stawek rozliczeniowych za połączenia międzyoperatorskie, niż analiza oparta wyłącznie na kosztach świadczenia usług.
- Modelowanie i analiza popytu na usługi telekomunikacyjne w połączeniu z analizą kosztów świadczenia tych usług prowadzi do bardziej skutecznego działania na rynku.
- Modele rozwiązywania sytuacji konfliktowych oparte o teorię gier dają się stosować do lepszego zrozumienia i rozwiązywania problemów konkurencyjnych na rynku usług telekomunikacyjnych.

Układ pracy

Układ pracy jest następujący:

- **Część główna pracy**

Rozdział 1 stanowi wprowadzenie w tematykę konkurencji na rynku usług telekomunikacyjnych. Wytłumaczone zostały podstawowe pojęcia, zarysowano trudności, stojące na drodze do konkurencyjnej formy rynku telekomunikacyjnego, oraz zilustrowano różne podejścia do kwestii rozliczeń międzyoperatorskich.

Rozdział 2 poświęcony jest zagadnieniu modelowania gry rynkowej. Przedstawiono klasyfikację gier rynkowych na konkurencyjnym rynku telekomunikacyjnym ze względu na cel, jaki wyznacza realizowana przez przedsiębiorstwa telekomunikacyjne polityka. Wychodząc od modelu popytu i modelu kosztów zdefiniowano funkcje wypłat dla każdej z gier, oraz określono pojęcie strategii gry. W zależności od informacji na temat modelu kosztów oraz strategicznych celów konkurencyjnych graczy, wyróżniono dwa zasadnicze rodzaje gier jednokryterialnych - gry przeciwko naturze oraz N-osobowe gry o sumie niezerowej. Wykazano konieczność wielokryterialnej analizy gry rynkowej.

Rozdział 3 ilustruje metody analizy oraz wspomagania decyzji, związanych z procesem ustalania cen na rynkach detalicznych i hurtowych w sytuacji nieznajomości modelu kosztów konkurencyjnych graczy. Zaadaptowano powszechnie znane oraz zaproponowano autorskie kryteria wyboru strategii gry. Omówiono sposób pozbywania się niejednoznaczności otrzymanego rozwiązania. Zilustrowano możliwość zastosowania analizy wielokryterialnej w procesie decyzyjnym. Zaproponowano sposób wskazywania konkurencyjnego gracza, znajomość decyzji którego przynosi danemu graczowi najwięcej korzyści. Omówiono wpływ różnych sekwencji ruchów graczy w kwestii ustalania cen na rynku detalicznym i negocjacji cen na rynku hurtowym, na efektywność procesu negocjacji. Zaproponowano metodę określania wartości korzyści ze zmiany kolejności ruchów graczy.

Rozdział 4 stanowi szkic do analizy wieloosobowych i wielokryterialnych gier rynkowych.

- **Dodatki**

  Dodatek A ilustruje powszechnie znane oraz autorskie kryteria wyboru strategii w grach przeciwko naturze.

  Dodatek B poświęcony jest zagadnieniu regularyzacji rozwiązań niejednoznacznych. Wskazano użyteczne i nieużyteczne zestawienia kryteriów.

  Dodatek C omawia sposób obliczania wartości informacji, dotyczącej znajomości decyzji konkurencyjnych graczy, dla różnych kryteriów wyboru strategii.

  Dodatek D ukazuje niektóre niebezpieczeństwa i swoiste pułapki racjonalności, jakie czyhają na graczy rynkowych w sytuacji ograniczeń informacyjnych związanych z nieznajomością macierzy wypłat graczy konkurencyjnych.

  Dodatek E przedstawia sposób obliczania rozmiaru macierzy wypłat.

  Dodatek F dotyczy zagadniania modelowania popytu na usługi telekomunikacyjne. Rozpatrzono liczne czynniki determinujące zmienność popytu w tym: cenę usługi, ceny usług komplementarnych i substytucyjnych, dochód abonentów, ich profil, czas świadczenia usługi, dzień tygodnia, liczbę abonentów. Dla trzech szczególnych przypadków - ekstremalny, monopol i konkurencja - zbudowano analityczne modele opisujące wpływ owych determinantów na wielkość generowanego ruchu, rozpływ ruchu w sieci i liczbę abonentów.

- **Zakończenie**

  W zakończeniu dokonano podsumowania osiągniętych rezultatów i nakreślono kierunki dalszych badań.

Spis treści

Spis rysunków

Spis tabel

Część I

Część główna pracy

Rozdział 1

Wprowadzenie do tematyki konkurencji na rynku telekomunikacyjnym

1.1 Od monopolu do konkurencji

Od początku do lat 80-tych ubiegłego stulecia, tak w teorii jak i praktyce dominował pogląd, iż z punktu widzenia dobrobytu społecznego rynek usług telekomunikacyjnych winien być rynkiem monopolistycznym [135]. Pogląd ten motywowany był względem na specyfikę tegoż rynku, w którym dla osiągnięcia oczekiwanych korzyści i środków na dalszy rozwój niezbędne było ponoszenie znacznych kosztów na inwestycje w rozwój infrastruktury sieci oraz w dalszej kolejności zapewnienie pokaźnej minimalnej skali wielkości świadczonych usług (minimalnej skali produkcji). Wymagania te w sposób najbardziej skuteczny i efektywny spełnić mieli operatorzy dużych sieci, którym monopolistyczną pozycję na rynku gwarantowały określone przepisy prawne. Niemalże we wszystkich państwach operator ten był operatorem narodowym.

Nieco inaczej rzecz się miała w Stanach Zjednoczonych, gdzie operatorem tym była firma prywatna AT&T. W tym też kraju w roku 1968 na mocy decyzji sądowej, stwierdzającej brak konieczności dalszego utrzymywania monopolu na rynku usług telekomunikacyjnych rozpoczął się proces demonopolizacji [191].

W Europie, w latach 80-tych ubiegłego stulecia, wraz z postępującym rozwojem technicznym, który generował zmiany umożliwiające zmniejszenie minimalnej efektywnej skali produkcji, jak również wraz z pogłębioną refleksją dotyczącą braku oczekiwanej efektywności oraz jakości świadczenia usług telekomunikacyjnych zaczęły pojawiać się coraz śmielsze przypuszczenia, iż monopol na rynku usług telekomunikacyjnych nie jest rozwiązaniem najbardziej właściwym. Pojawiły się również hipotezy poddające w wątpliwość twierdzenie, jakoby rzeczywistą przyczyną utrzymywania monopolu państwowego w telekomunikacji był wzgląd na warunki technologiczne charakteryzujące się wysokimi kosztami stałymi i pokaźną minimalną skalą produkcji. Faktyczną przyczyną utrzymywania monopolu miała być obawa przed utratą bieżących dochodów budżetowych [135]. Przed politykami, ekonomistami i inżynierami krajów rozwiniętych stanął w ten sposób problem wyboru typowo ekonomicznego: czy preferować korzyści długookresowe, co wiązało się z wprowadzeniem zasad konkurencji, które zdynamizować miały rozwój telekomunikacji, czy też przedkładać nad nie bieżące dochody budżetowe?

W roku 1987 w krajach Unii Europejskiej (UE) zdecydowano się na wprowadzenie zasad otwartego i w pełni konkurencyjnego rynku [66]. Dziesięć lat później, 30 czerwca 1997 roku w krajach tych ogłoszono stosowną dyrektywę (97/33/WE) [40], określającą zasady funkcjonowania na rynku usług telekomunikacyjnych w środowisku otwartym na konkurencję. Dyrektywa ta adresowana była do wszystkich krajów Wspólnoty, jak również do krajów ubiegających się o wstąpienie do niej. Pełne otwarcie rynku - konkurencja na poziomie lokalnym, międzystrefowym i międzynarodowym - w krajach Wspólnoty nastąpiło w roku 1998.

Rozpoczął się proces demonopolizacji rynku telekomunikacyjnego. Jednakże specyfika tegoż rynku domaga się, by proces ten dokonywał się stopniowo i pod kontrolą. Silni operatorzy nie są zainteresowani rozwojem konkurencji na rynkach, gdzie dotychczas posiadali pozycję monopolistyczną, a będąc pozostawionymi bez żadnej kontroli są w stanie skutecznie uniemożliwić wejście na rynek nowym operatorom. Stąd demonopolizacja rynku telekomunikacyjnego nie oznacza jego pełnej liberalizacji. W celu zagwarantowania konkurencyjności rynku powołuje się odpowiednie organa regulacyjne [192], których zadaniem jest ustalanie reguł funkcjonowania na rynku oraz kontrola, czy poszczególne podmioty - uczestnicy rynku - reguł tych przestrzegają, z możliwością nakładania odpowiednich sankcji w przypadku ich łamania. Centralnym punktem skupienia uwagi regulatorów są zasady, na jakich opierać się ma połączenie między sieciami - (*interconnection*), będące częścią zdefiniowanego w późniejszych latach (2002) szeroko rozumianego *dostępu do sieci* [32, 138].

1.2 Kluczowe zagadnienia połączeń międzysieciowych

W punkcie tym przedstawiono kluczowe zagadnienia wiążące się z tematyką połączeń międzysieciowych - *interconnection*.

1.2.1 Definicja interconnection

W dyrektywie (97/33/WE, 1997) w sprawie interconnection w telekomunikacji, w odniesieniu do zapewnienia powszechnych usług i współdziałania poprzez zastosowanie zasad udostępniania otwartej sieci ONP - *Open Network Provision* [40] przyjęto następującą definicję:

Definicja 1.2.1 Interconnection *oznacza fizyczne oraz logiczne połączenie sieci telekomunikacyjnych użytkowanych przez jedną lub przez różne organizacje w celu umożliwienia użytkownikom jednej organizacji komunikowanie się z użytkownikami tej samej lub innej organizacji lub uzyskanie dostępu do usług świadczonych przez inną organizację. Usługi takie mogą być świadczone przez zaangażowane strony lub przez inne strony mające dostęp do sieci.*

Opublikowana w 2002 roku Dyrektywa Dostępowa (2002/19/EC) [32] przejmuje wszystkie elementy cytowanej wyżej definicji, zarysowując jednocześnie różnicę pomiędzy połączeniem sieci a dostępem. Połączenie sieci jest szczególnym rodzajem dostępu realizowanego z udziałem operatorów sieci publicznych.

1.2.2 Punkt połączenia sieci - POI

Połączenie sieci realizowane jest w punkcie nazywanym w skrócie POI - *Point of Interconnect*. Operatorzy zobowiązani są do udostępniania odpowiedniej liczby takich punktów. Odnośnie POI operatorzy łączonych sieci uzgadniają między innymi następujące kwestie [53]:

- Na jakim poziomie hierarchii architektury sieciowej umiejscowiony zostanie POI (np. na poziomie sieci lokalnej, międzystrefowej etc.)?
- Gdzie fizycznie zlokalizowany będzie POI? Możliwe są dwa sposoby fizycznej lokalizacji punktu połączenia:
  - POI znajduje się w węźle sieci jednego z operatorów (np. A). W takim przypadku na drugim operatorze (B) spoczywa obowiązek poprowadzenia fizycznego łącza do tego punktu.
  - POI znajduje się w miejscu pośrednim. W tym przypadku zarówno operator A jak i B prowadzą fizyczne łącze do tego punktu.
- Parametry łącza realizującego połączenie: rodzaj łącza transmisyjnego (np. miedziany, światłowodowy, droga radiowa), protokół transmisyjny, szybkość transmisji, wielkość rezerwy przepustowości na cele protekcyjne, rodzaj sygnalizacji, czy łącze będzie jedno czy dwukierunkowe, kto będzie właścicielem multiplekserów i demultiplekserów itp.

1.2.3 Usługi połączenia sieci

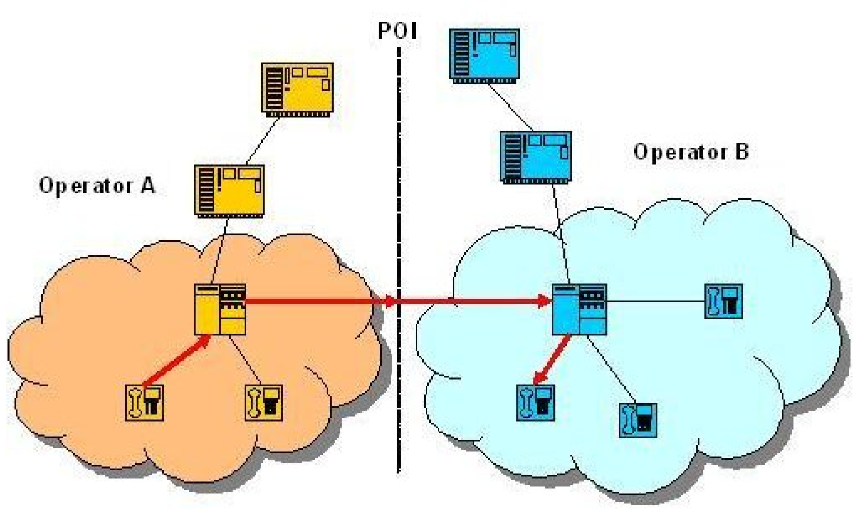
Wraz z możliwością łączenia się sieci telekomunikacyjnych pojawia się nowa usługa jaką operatorzy świadczą sobie nazwajem. Jest to tzw. *usługa połączenia*. Usługa ta składa się z dwóch elementów: rozpoczęcia połączenia i zakończenia połączenia. W szczególnym przypadku, gdy dany operator jedynie pośredniczy w realizacji połączenia, usługa ta jest usługą tranzytowania ruchu.

Usługa połączenia polega na możliwości kierowania ruchu telekomunikacyjnego z jednej sieci do drugiej albo korzystania z usług oferowanych w niej lub za jej pośrednictwem. Dla potrzeb realizacji usługi połączenia operator może zbudować w ramach swej sieci fizycznej niezależną sieć logiczną.

W zależności od miejsca w strukturze sieci przekazywania ruchu pomiędzy sieciami przyjmuje się zwykle następującą klasyfikację[1] usług połączenia, które nazywali będziemy *poziomami interconnectu* [6, 18, 36, 44, 53]:

- Lokalne rozpoczęcie/zakończenie połączenia (*Local*)
  Ruch międzysieciowy przekazywany jest z centrali lokalnej operatora A, do której podłączony jest abonent inicjalizujący połączenie (lokalne rozpoczęcie), do lokalnej centrali operatora B, do której podłączony jest abonent, do którego połączenie jest kierowane (lokalne zakończenie). Lokalne rozpoczęcie i zakończenie połączenia zilustrowano na rysunku 1.1.

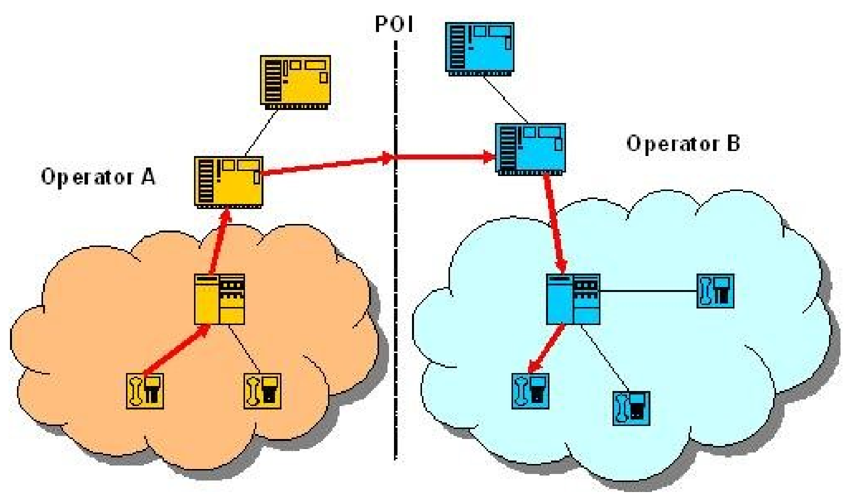
Rysunek 1.1: Lokalne rozpoczęcie/zakończenie połączenia.



[1] Nie jest to jedyna możliwa klasyfikacja.

- Rozpoczęcie/zakończenie połączenia z pojedynczym tranzytem (*Single Tandem*)
  Ruch międzysieciowy przekazywany jest z centrali tranzytowej operatora A, obsługującej strefę numeracyjną, w której znajduje się abonent inicjalizujący połączenie (rozpoczęcie połączenia), do centrali tranzytowej operatora B, obsługującej strefę numeracyjną, w której znajduje się abonent, do którego połączenie jest kierowane (zakończenie połączenia). Rozpoczęcie i zakończenie połączenia z pojedynczym tranzytem zilustrowano na rysunku 1.2.

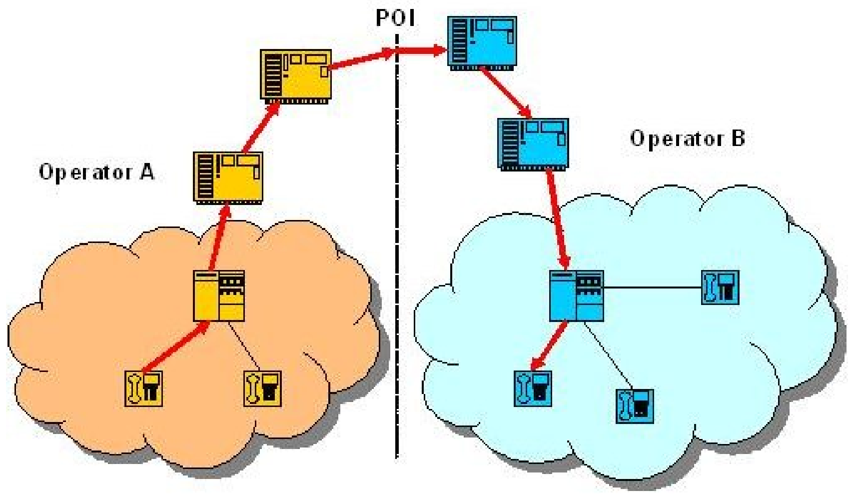
Rysunek 1.2: Rozpoczęcie/zakończenie połączenia z pojedynczym tranzytem.



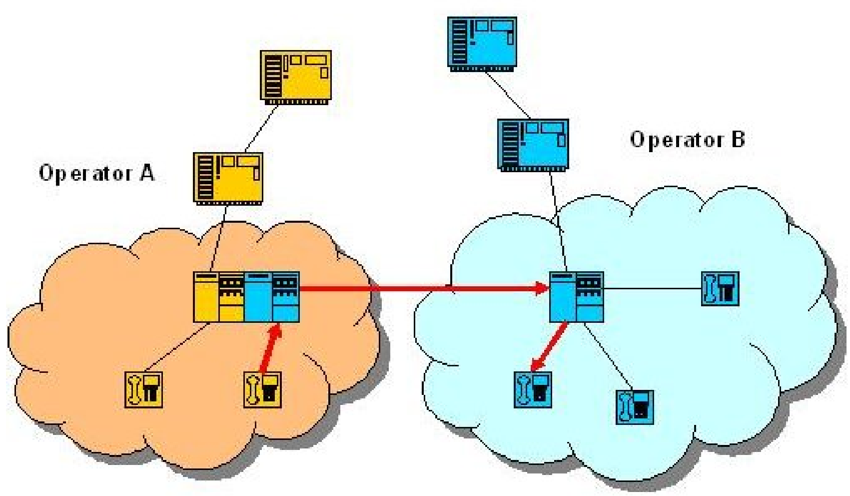
- Zakończenie połączenia z podwójnym tranzytem (*Double Tandem*)
  Ruch międzysieciowy przekazywany jest z centrali tranzytowej operatora A, obsługującej strefę numeracyjną inną niż ta, w której znajduje się abonent inicjalizujący połączenie (rozpoczęcie połączenia), do centrali tranzytowej operatora B, obsługującej strefę numeracyjną inną niż ta, w której znajduje się abonent, do którego połączenie jest kierowane (zakończenie połączenia). Rozpoczęcie i zakończenie połączenia z podwójnym tranzytem zilustrowano na rysunku 1.3.

Szczególnym rodzajem dostępu do sieci, nie będącym w istocie połączeniem sieci jest bezpośredni dostęp do lokalnej pętli abonenckiej (*Local Loop Unbundling*). Dostęp ten polega na tym, iż dany operator (A) umożliwia bezpośrednie dotarcie do swojego abonenta drugiemu operatorowi (B) na zasadzie dzierżawy części własnej infrastruktury w pętli abonenckiej, z pominięciem centrali lokalnej własnej sieci. Symbolicznie dostęp do lokalnej pętli abonenckiej przedstawiono na rysunku 1.4.

Rysunek 1.3: Rozpoczęcie/zakończenie połączenia z podwójnym tranzytem.



Rysunek 1.4: Dostęp do lokalnej pętli abonenckiej (*Local Loop Unbundling*).



1.2.4 Rola krajowych władz regulacyjnych

Proces demonopolizacji rynku telekomunikacyjnego, a w dalszej perspektywie utrzymania jego konkurencyjności, wymaga ze względu na swą specyfikę istnienia silnych i niezależnych organów regulacyjnych [64, 94, 132, 139, 145]. W miarę rezygnowania przez państwa z własnościowych instrumentów oddziaływania na przedsiębiorstwa telekomunikacyjne - prywatyzując dotychczasowych monopolistów - władze państwowe nie pozbywały się odpowiedzialności za dostęp do podstawowych usług infrastrukturalnych. Promocja konkurencyjności rynku odbywa się poprzez jego regulację. Poniżej wymieniono podstawowe zadania władz regulacyjnych:

- Wydawanie aktów administracyjnych ustanawiających obowiązki niezbędne do osiągnięcia celów polityki telekomunikacyjnej.
- Rozstrzyganie sporów pomiędzy uczestnikami rynku.
- Zadania inspekcyjne i egzekucyjne, nastawione na zapewnienie wykonania obowiązków wynikających z przepisów ogólnych i indywidualnie ustalonych obowiązków przedsiębiorstw.

Zasady działalności regulacyjnej ująć można w czterech punktach [138]. Regulacja powinna:

- opierać się na jasno określonych celach polityki w danym sektorze,
- ograniczać się do minimum niezbędnego do realizacji tych celów,
- przyczyniać się do wzrostu poziomu stablilności prawnej na dynamicznym rynku,
- być neutralna pod względem technologicznym.

Szczególnym obszarem zainteresowania urzędów regulacyjnych są zasady rozliczeń międzyoperatorskich [38, 58, 77, 78, 79, 81, 186].

1.2.5 Operator ze znaczącą siłą rynkową

Celem regulacji jest doprowadzenie do wytworzenia trwałej konkurencji na rynku. Stopień konkurencyjności rynku determinuje pożądany zakres ingerencji regulacyjnych. Istotą ingerencji regulacyjnych jest nakładanie na przedsiębiorstwa telekomunikacyjne takich obowiązków i ograniczeń, które wyrównywały będą szanse wszystkich uczestników rynku. Szczególne znaczenie mają obowiązki i ograniczenia egzekwowane wyprzedzająco (*ex ante*), czyli przed podjęciem określonych czynności gospodarczych. Są one bardziej skuteczne niż działania następcze i pozwalają zapobiegać negatywnym dla rynku zachowaniom przedsiębiorstw, a nie tylko usuwać ich następstwa [138]. Z racji na bardziej krępujący swobodę przedsiębiorstw charakter regulacji wyprzedzających oraz pracochłonność związaną z precyzyjnym określaniem sytuacji rynkowej i oceną skutków regulacji, obowiązków i ograniczeń o charakterze wyprzedzającym nie nakłada się na wszystkich uczestników rynku, a jedynie na podmioty posiadające tzw. *znaczącą siłę rynkową* (*Significant Market Power* - SMP).

Dyrektywa 97/33/WE określała, że „dana organizacja posiada znaczącą siłę rynkową, jeżeli jej udział na danym rynku telekomunikacyjnym, na danym obszarze geograficznym w tym Państwie Członkowskim, w którym jest ona upoważniona do prowadzenia działalności, przekracza

25%. Krajowe władze regulacyjne mogą jednak ustalić, że dana organizacja posiada znaczącą siłę rynkową, mimo, że jej udział na rynku jest mniejszy niż 25%. Mogą one także ustalić, że organizacja, której udział na rynku jest większy niż 25%, nie posiada znaczącej siły rynkowej. W obu tych wypadkach, przy dokonywaniu takich ustaleń uwzględnia się zdolność danej organizacji do wpływania na warunki panujące na rynku, wielkość jej obrotów w stosunku do rozmiarów rynku, jej kontrolę środków dostępu do końcowych użytkowników, dostęp do zasobów finansowych i doświadczenie w zakresie dostarczania produktów i usług na rynku" [40]. W Przeglądzie Łącznościowym 1999 r. wyodrębnia się dwa poziomy siły rynkowej: pozycję znaczącą i dominującą. Ostateczne rozwiązanie zastosowane w porządku regulacyjnym z roku 2002 znaczącą pozycję rynkową ustala zgodnie z koncepcją dominacji rynkowej w rozumieniu wspólnotowego prawa konkurencji.

1.3 Problemy połączeń międzysieciowych

Sieci telekomunikacyjne łączono od dawna. Bez takich połączeń niemożliwa byłaby komunikacja międzynarodowa. Tak więc z punktu widzenia technicznego nie jest to zagadnienie nowe. W przypadku połączeń międzysieciowych w ramach jednego kraju nowym jest to, iż łączą się sieci należące do operatorów konkurujących ze sobą na rynku i ten właśnie aspekt staje się źródłem dodatkowych problemów.

1.3.1 Sprzeczność i złożoność interesów

Wśród problemów związanych bezpośrednio z połączeniami międzysieciowymi przede wszystkim należy wymienić fakt przynajmniej częściowej sprzeczności innteresów poszczególnych uczestników rynku - operatorów łączących swe sieci. Problemy te wyostrzają się szczególnie wtedy, gdy jedną ze stron jest operator o znaczącej sile rynkowej. Jego aspiracje nie idą z reguły w parze z tymi, które posiada operator nowy.

- Operator o znaczącej sile chciałby [120]:
  - mieć pewność, że nie odda żadnego majątku,
  - świadczyć pewne zestawy usług (bez wydzielania poszczególnych rodzajów),
  - wynegocjować jak najwyższą cenę przyłączenia.
- Operator nowy chciałby:
  - opanować jak największy segment rynku,

- zawrzeć umowę obejmującą tylko aktualnie korzystny fragment, infrastruktury i/lub konkretną usługę,
- wynegocjować jak najniższą cenę przyłączenia.

Zwykle nieco odmienne interesy względem interesów operatorów reprezentuje regulator rynku. Interesy te odzwierciedlają szeroko rozumiane potrzeby społeczne [56, 80, 83].

1.3.2 Interdyscyplinarność

Połączenia międzysieciowe to dziedzina interdyscyplinarna. Każda z dyscyplin sama w sobie stwarza różne problemy. Dodatkowy problem rodzi się stąd, iż dyscyplin tych nie można do końca rozdzielić i w ten sposób niezależnie rozwiązać związane z nimi problemy. Przy negocjacyjnym stole zasiąść powinni eksperci od następujących dziedzin [180]:

- Telekomunikacji, w szczególności ze znajomością:
  - technologii stosowanych w łączonych sieciach,
  - infrastruktury sieci, z uwzględnieniem funkcji spełnianych przez poszczególne elementy sieciowe,
  - usług świadczonych w sieciach, z uwzględnieniem procesów składowych oraz wykorzystywanych elementów sieci.
- Ekonomii, w szczególności ze znajomością:
  - zasad rządzących rynkiem (wzajemnych zależności popytu, podaży, cen świadczenia usług i ich wpływu na zysk czy udział w rynku), z uwzględnieniem specyfiki rynku telekomunikacyjnego,
  - kalkulacji kosztów świadczenia poszczególnych usług.
- Prawa telekomunikacyjnego
- Teorii Negocjacji i dyscyplin pokrewnych, jak:
  - teoria gier,
  - teoria przetargu (gier kooperacyjnych),
  - teoria zasadnego podziału,
  - teoria gier wielokryterialnych,
  - teoria optymalizacji,

– teoria decyzji,

– psychologia zachowań w sytuacjach konfliktowych,

– historia dyplomacji.

1.3.3 Czynnik ludzki

Naiwnym byłoby twierdzenie, że problemy związane z połączeniami międzysieciowymi sprowadzają się do zmagań li tylko z martwą naturą, nie skorą do pójścia na rękę nowym zamiarom człowieka. Pomijając całą złożoność zjawiska, cały splot różnych zgodnych i sprzecznych interesów, cały bagaż doświadczeń i przyzwyczajeń, jakie przyniosła z sobą ta część dziejów człowieka, którą zwykliśmy nazywać historią... jednym z najistotniejszych problemów, z jakim przychodzi się zmagać w kontekście połączeń międzysieciowych jest *brak dobrej woli*. Problem ten - ludzka przypadłość, znamię lichej kondycji - dotyka osoby odpowiedzialne i bezpośrednio zainteresowane w powiększaniu zysków operatorów dużych jak i małych. Dopóki problem ten pozostanie nierozwiązany - a nie zanosi się na to, by tak się w skali globalnej w najbliższym czasie stać mogło - liczyć się trzeba nieuchronnie z trudnościami, które pokonywane będą tylko częściowo i krótkotrwale.

1.3.4 Rozliczenia międzyoperatorskie

Bez wątpienia najistotniejszym problemem związanym z połączeniami międzysieciowymi jest kwestia rozliczeń międzyoperatorskich [2, 9, 16, 20, 46, 48, 50, 57, 74, 94, 95, 96, 97, 98, 120, 133, 135, 136, 137, 144, 173, 174, 186]. Kto, komu, w jakiej wysokości i za co powinien płacić? - to kluczowe pytania, z odpowiedzią na które borykają się regulatorzy i przedsiębiorstwa telekomunikacyjne. Z racji na wagę tego zagadnienia, jak również fakt, iż stanowi ono centrum uwagi niniejszej pracy, kwestii rozliczeń międzyoperatorskich poświęcimy osobny punkt.

1.4 Rozliczenia międzyoperatorskie

1.4.1 Zasady realizacji rozliczeń międzyoperatorskich

Generalnie wyróżnić można dwa sposoby ustalania zasad, na których oparte będą rozliczenia międzyoperatorskie [50]:

- Arbitralne, kiedy to operatorzy rozliczają się według zasad ustanowionych i ogłoszonych przez regulatora,

- Umowne, kiedy to operatorzy ustalają zasady rozliczeń w drodze wzajemnych negocjacji.

W szczególności zasady te winny być [44]:

- stymulujące szybki rozwój i szybką modernizację sieci,
- wpływające na poprawienie wydajności gospodarczej i technicznej sieci telekomunikacyjnej,
- sprawiedliwe dla wszystkich stron biorących udział w połączeniach telekomunikacyjnych,
- przejrzyste i wynikające z przyjętych metod,
- oparte na kosztach związanych z realizacją połączeń międzysieciowych,
- zapewniające odpowiednią marżę zysku,
- niezwiązane z opłatami taryfowymi.

Negocjacje stanowią preferowany sposób ustanawiania zasad wzajemnej współpracy. Ingerencja regulatora stosowana jest z reguły wówczas, gdy operatorzy nie mogą dojść wzajemnie do porozumienia. Intensywność tego typu ingerencji wzrasta początkowo wraz ze wzrostem poziomu konkurencji, a następnie stopniowo maleje, by z czasem wręcz zaniknąć w sytuacji, gdy rynek będzie już silnie konkurencyjny, nastawiony na konsumenta i stabilny [195].

1.4.2 Metody realizacji rozliczeń

Zarówno w przypadku zasad ustanowionych arbitralnie, jak i w drodze negocjacji, rozliczenia międzyoperatorskie realizowane są w oparciu o jedną z trzech poniższych metod [50]:

- Metoda „bill & keep”
  W metodzie tej operatorzy nie dokonują żadnych rozliczeń między sobą, natomiast w całości zachowują dla siebie opłaty pobrane od abonentów. Metoda ta bywa stosowana w początkowej fazie wspólnego świadczenia usług.
- Wspólne wykorzystanie środków
  W metodzie tej operatorzy łączą swoje przychody, a następnie ponownie je rozdzielają w zależności od wielkości poniesionych kosztów na wyświadczenie poszczególnych usług.
- Ustalanie stawek rozliczeniowych
  W metodzie tej operatorzy ustalają kwoty za wybraną jednostkę czasu połączenia lub przekazywanej informacji - tzw. stawki rozliczeniowe. Stawki zróżnicowane są tak, by odzwierciedlały sposób połączenia sieci (poziom interconnectu). Przyjmując klasyfikację usług połączenia jak w punkcie 1.2.3 wyróżnić możemy stawki za:

- lokalne rozpoczęcie/zakończenie połączenia,
- rozpoczęcie/zakończenie połączenia z pojedynczym przejściem,
- rozpoczęcie/zakończenie połączenia z podwójnym przejściem,

jak również

- stawki za współkorzystanie z lokalnej pętli abonenckiej.

W obecnej praktyce stawki rozliczeniowe ustalane są w oparciu o jedną z dwóch metod:

- Stawki oparte na kosztach świadczenia usług,
- *Benchmarking* - ustalanie stawek na zasadzie porównania ze stawkami stosowanymi w innych sieciach.

Preferowaną metodą realizacji rozliczeń jest metoda ustalania stawek rozliczeniowych. Zaleca się, by stawki te ustalać w oparciu o koszty świadczenia usług[2], kalkulowane według określonej metody [12, 35, 50, 87, 133, 137, 155, 165, 197].

1.4.3 Metody kalkulacji kosztów

Poniżej przedstawiono pięć różnych metod kalkulacji kosztów świadczenia usług telekomunikacyjnych.

- Metoda *Embedded Cost* (EC)
  Metoda kosztów historycznych lub pierwotnych. Stosując metodę EC przypisuje się usługom wszystkie pierwotnie poniesione bezpośrednie i pośrednie koszty wrażliwe na wielkość wyświadczonych usług oraz koszty stałe.

- Metoda *Short Run Marginal Cost* (SRMC)
  Metoda kosztów krańcowych lub marginalnych. Metoda SRMC wyznacza koszt jednej dodatkowej jednostki usługi w ramach istniejącej sieci. Istnieje tu założenie, iż dana usługa jest już świadczona. Koszty krańcowe zawierają tylko te koszty, które ulegają zmianie wraz z jednostkową zmianą wydajności. Koszty te mogą być równocześnie zdefiniowane jako te, których się nie ponosi (unika), gdy nie dostarcza się usług. Metoda SRMC umożliwia wyznaczenie dolnego pułapu stawek rozliczeniowych.

[2] *Benchmarking* zalecany i stosowany jest wówczas, gdy operatorzy nie znają modelu kosztów własnej działalności.

- Metoda *Long Run Incremantal Cost* (LIRC)
  Metoda długookresowych kosztów przyrostowych. Metoda LIRC polega na policzeniu dodatkowych kosztów oraz nakładów inwestycyjnych, które zostaną poniesione z powodu świadczenia dodatkowej ilości usług, niezależnie od tego, czy ten rodzaj usługi jest już świadczony czy też nie. Metoda ta zachowuje wiele pożądanych własności metody SRMC przy jednoczesnym uwzględnieniu kosztów związanych z wprowadzeniem nowej usługi.

- Metoda *Fully Distributed Cost* (FDC)[3]
  Metoda kosztów w pełni rozdzielonych. W metodzie FDC wszystkie koszty, które zostały poniesione przy wytworzeniu usług są przydzielane (alokowane) do tych usług (podzielone na te usługi). Koszty wyznaczone metodą FDC uwzględniają koszty wprost przypisane do usługi, czyli te, które przydziela metoda LRIC oraz wspólne koszty stałe. Przypisanie kosztów stałych poszczególnym usługom wymaga zastosowania odpowiednich kluczy rozliczeniowych. Klucze te mogą uwzględniać udział poszczególnych usług w dochodach brutto, dochodach netto, w stopniu obciążenia obiektów wspólnego wykorzystania. Metoda ta pozwala na ustalenie górnego pułapu stawek rozliczeniowych.

- Metoda *Stand Alone Cost* (SAC)
  Metoda kosztów nierozdzielonych lub wyodrębnionych. Metoda SAC przypisuje wszystkie koszty, które istniałyby, gdyby wyłączono wszystkie usługi oprócz tej jednej, której koszt świadczenia jest wyznaczany. Są to zatem wszystkie koszty operacyjne i kapitał potrzebny do świadczenia usługi, włączając w to koszty stałe, zmienne i wspólne związane z usługą. Metoda ta również pozwala na wyznaczenie górnego pułapu stawek rozliczeniowych. Pułap ten jest jednak wyższy niż w przypadku wyznaczonego metodą FDC, przy założeniu oczywiście, że w metodzie FDC uwzględniano więcej niż jedną usługę.

1.4.4 Problem wysokości stawek rozliczeniowych

Kwestia ustalania wysokości stawek rozliczeniowych nie jest problemem trywialnym. Stawki te nie mogą być ani zbyt wysokie, ani zbyt niskie. Niewłaściwy dobór wysokości stawek prowadzi w efekcie do zachwiania równowagi rynkowej, a w dalszej perspektywie do zmniejszenia efektywności działania całego sektora. Wysokość stawek rozliczeniowych jest istotna z następujących powodów [195]:

- Stawki wpływają na decyzję potencjalnego operatora o wejściu na rynek.

- Stawki wpływają na szybkość, z jaką dotychczasowy operator narodowy traci udział w rynku.

[3] Występuje również pod nazwą *Fully Allocated Cost* (FAC) - metoda kosztów w pełni alokowanych.

- Stawki wpływają na decyzje inwestycyjne nowych podmiotów w zakresie budowy własnej infrastruktury lub dzierżawy infrastruktury, znane jako decyzje „wytworzyć czy kupić”?

- Stawki wpływają na poziom konkurencji, a także na taryfy detaliczne, marże oraz efektywność całego sektora.

W szczególności [120]:

- Stawki zbyt wysokie:
  - opóźniają efektywne wejście na rynek nowych operatorów, a przez to hamują rozwój konkurencyjnego rynku,
  - powodują nadmierne powielanie infrastruktury, gdyż operatorom nowym bardziej opłaca się budować własną sieć, niż płacić za dzierżawę sieci operatora już istniejącego.

- Stawki zbyt niskie
  - sprawiają, iż dotychczasowy operator narodowy gwałtownie traci udział w rynku,
  - generują mniejszy przychód, a to oznacza zmniejszenie środków na inwestycje, które mogłyby zapewnić lepszą jakość i większą dostępność usług.

Od właściwego doboru wysokości stawek rozliczeniowych zależy, czy realizowana będzie pomyślnie istota koncepcji połączeń międzysieciowych - dostarczenie zróżnicowanych i konkurencyjnych usług, przy jednoczesnym unikaniu dublowania kosztów.

Istnieje pogląd [172], iż stawki rozliczeniowe powinny być tak dobrane, by mogły:

- kreować pluralistyczny i konkurencyjny rynek telekomunikacyjny,

- wpływać na obniżenie kosztów świadczenia usług, a w konsekwencji na obniżenie taryf,

- mobilizować dawnych monopolistów do efektywniejszej działalności,

- dawać operatorowi niezależnemu względną swobodę działania i stwarzać warunki, umożliwiające jego rozwój.

1.5 Niewystarczalność podejścia kosztowego do procesu ustalania cen na rynku usług telekomunikacyjnych

Konkurencja postrzegana jest obecnie jako skuteczne narzędzie stymulowania rozwoju rynku telekomunikacyjnego. Kluczem, a zarazem główną przeszkodą w jej wprowadzeniu są zagadnienia związane z połączeniami międzysieciowymi, w szczególności zaś problem wysokości stawek rozliczeniowych. Rozwiązaniem tego problemu - tyleż prostym, co trudnym w praktycznej realizacji, a przez to zawodnym - ma być regulacja cen usług na rynku hurtowym oparta na powiązaniu ich z kosztami świadczenia tych usług. Wysokość cen na rynku detalicznym pozostawia się gestii swobodnej decyzji operatorów sugerując jedynie, by pomiędzy cenami na rynku hurtowym, a cenami na rynku detalicznym nie było wyraźnego powiązania. Zasada ta prowokuje operatorów do zawyżania wysokości kosztów na rynku hurtowym, poprzez odpowiednie „przesunięcia" składników kosztów z rynku detalicznego na hurtowy tak, by w ten sposób uzyskać możliwie największą cenę za usługi związane z połączeniami międzyoperatorskimi. Przypomina to nieco próbę kierowania koniem, poprzez ciągnięcie go tylko za jedną uzdę. W rzeczywistości bowiem z punktu widzenia operatorów rynki hurtowe i detaliczne są wzajemnie ściśle powiązane i decyzje dotyczące jednego z nich, pośrednio dotyczą też drugiego. To, co te rynki wiąże nie jest związane tylko z kosztem świadczenia usług, który określić można jako własność opisującą operatora. Drugim, nie mniej istotnym łącznikiem jest popyt na oferowane usługi, swoista własność opisująca użytkowników usług, funkcja opisująca zależność ilości nabywanych dóbr czy usług w zależności od licznych czynników, w tym cen. Dopiero znajomość popytu i kosztów pozwala na wysuwanie trafnych prognoz dotyczących tego, jaki wpływ na sytuację rynkową będą miały ceny.

Ceny, wraz z powiązanymi z nimi usługami, jakie świadczą przedsiębiorstwa telekomunikacyjne stanowią swoistą „strategię gry" [190] w konkurencyjnej grze rynkowej. Wysokość cen uzależniona jest od celów, jakie przedsiębiorstwo chce osiągnąć oraz od celów przedsiębiorstw konkurencyjnych i przyjętych przez nie sposobów ich realizacji (w tym ustalonych przez nie cen). Owe cele, jak np. maksymalizacja zysku, maksymalizacja udziału w rynku, optymalizacja dystrybucji ruchu w sieci, minimalizacja kosztów świadczenia usług itp. definiują kryteria oceny podjętych decyzji.

Gracze rynkowi podejmują swoje decyzje w sytuacji licznych ograniczeń, w tym ograniczeń informacyjnych [161]. Koncepcja obowiązku przedstawiania oferty ramowej, nakładanego na podmioty o znaczącej pozycji rynkowej stanowi jeden z instrumentów służących zaradzeniu negatywnym skutkom tego stanu rzeczy, poprzez stworzenie przejrzystych i równoprawnych warunków dostępu do sieci operatora, na którego nałożono obowiązek przedstawiania takiej oferty [138]. Jest to jednakże instrument operujący wyłącznie na rynku hurtowym, a ponadto nie wydaje się, by jego skuteczność wybiegała poza wąskie ramy celów, jakie przed nim postawiono [141].

Jednym z istotnych ograniczeń informacyjnych, przed jakimi stają gracze rynkowi jest nieznajomość struktury kosztów ponoszonych przez konkurencję. Z faktu tego wynika niemożność określenia funkcji zysku[4], a co za tym idzie ustalenia, jaki poziom cen za świadczone przez konkurencyjne przedsiębiorstwo usługi jest dla niego najbardziej (w danych warunkach) korzystny. Problem ten staje się ważny w przypadku, gdy gracze podejmują swe decyzje sekwencyjnie, uzależniając je wzajemnie od decyzji wcześniej podjętych przez konkurentów oraz od przewidywanych odpowiedzi konkurentów na własne decyzje. Nieznajomość funkcji zysku graczy konkurencyjnych, stanowiącej jedno z podstawowych kryteriów oceny wyników działalności każdego przedsiębiorstwa równoznaczne jest z niemożnością oszacowania, jakie decyzje oni podejmą (jakie ustalą ceny) w odpowiedzi na podjęte decyzje przez danego gracza.

Niniejsza praca stawia sobie za cel przezwyciężenie niektórych z wyżej wymienionych problemów.

[4] Do określenia funkcji zysku, prócz funkcji kosztów konieczna jest również funkcja przychodów. Ta ostatnia związana jest z modelem popytu, który jest wspólny dla całego rynku, a więc i dla wszystkich graczy [111].

Rozdział 2

Modelowanie gry rynkowej na konkurencyjnym rynku telekomunikacyjnym

2.1 Wprowadzenie

Konkurencyjna forma rynku telekomunikacyjnego stawia przedsiębiorstwa telekomunikacyjne w sytuacji, kiedy to osiągane przez nie wyniki zależą tak od ich własnych decyzji, jak i od decyzji innych przedsiębiorstw funkcjonujących na rynku. Decyzje poszczególnych podmiotów gry rynkowej są od siebie wzajemnie uzależnione. W odpowiedzi na decyzje jednego przedsiębiorstwa inne podejmuje decyzje, które w najlepszym stopniu realizują przyjętą przez nie politykę działania, która *nota bene* również bywa uzależniona od polityki, jaką stara się realizować to pierwsze. Problem zaostrza się wówczas, gdy podmiotów biorących udział w grze jest więcej i gdy muszą one podejmować decyzje równocześnie, a przy tym polityka każdego z nich jest złożona i dąży do realizacji wielu, często wzajemnie sprzecznych celów.

Aby w takiej sytuacji skutecznie wspierać decyzje poszczególnych podmiotów koniecznym jest właściwe zrozumienie istoty problemu, w tym jego problemów składowych, jak również zależności między nimi. W niniejszym rozdziale przeprowadzamy analizę gry rynkowej na konkurencyjnym rynku telekomunikacyjnym, ukierunkowaną na identyfikację podstawowych jej elementów oraz na wyłonienie i sklasyfikowanie gier elementarnych, z których ona się składa. Wynik tej analizy stanowi punkt wyjścia w procesie wspomagania decyzji, któremu poświęcona jest dalsza część pracy. W analizie posłużono się elementami teorii gier.

2.2 Podstawowe pojęcia teorii gier

Począwszy od roku 1928, kiedy w pracy Johna von Neumanna „Zur Theorie der Gesellschaftsspiele” sformułowane zostały pierwsze fundamentalne pojęcia i zależności, rozwinięte następnie szeroko w opublikowanej w 1944 roku pracy Johna von Neumanna i Oskara Morgensterna „Theory of Games and Economic Behavior”, matematyka poszerzyła obszar swego zainteresowania, obejmując swym zasięgiem tematykę różnego rodzaju sytuacji konfliktowych. Ta nowa teoria - teoria gier - wprowadza w obszar myśli ludzkiej bogaty aparat pojęciowy i zestaw metod analizy i rozwiązywania różnego typu sytuacji konfliktowych, które nazywane są tu *grami* [33, 131, 151, 182, 190]. W zależności od liczby uczestników - *graczy*, biorących udział w grze, przyjął się podział na *gry 2-osobowe* i *N-osobowe*[1]. W zależności od stopnia sprzeczności wzajemnych interesów graczy dzieli się gry na *gry o sumie zerowej* i *gry o sumie niezerowej.* W grach o sumie zerowej[2] wielkość wygranej, tzw. *wypłata*, jaką uzyskuje jeden z graczy jest dokładnie równa sumie strat, jakie ponoszą gracze pozostali. W grach o sumie niezerowej taka zależność nie musi zachodzić i w szczególnych przypadkach zyskiwać może wielu lub nawet wszyscy. Tu często rozważa się przypadki możliwej kooperacji między graczami.

Wyróżnia się różne sposoby reprezentacji gier - różne modele gier. I tak mamy:

- *Gry w postaci ekstensywnej*, czyli w postaci tzw. drzewa decyzyjnego.
- *Gry w postaci normalnej*, w których wartość wypłaty y_i dla i-tego gracza definiuje się w postaci funkcji wygranej f_i, będącej zależnością wiążącą wartość wypłaty y_i z decyzjami wszystkich N graczy $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$, przy czym zmienna x_i może być wektorem decyzji elementarnych. Szczególnym przypadkiem gier w postaci normalnej są tzw. *gry macierzowe*, kiedy to zbiór decyzji (nazywanych tu *strategiami*) poszczególnych graczy jest dyskretny, a zbiór wypłat dla poszczególnych graczy przedstawia się w formie macierzy.
- *Gry w postaci funkcji charakterystycznej*, w których każdemu podzbiorowi graczy $S \subseteq N$ (tzw. koalicji) przypisuje się wartość wypłaty $v(S)$.

Wyróżnić można również podział na gry *jednorazowe* i *powtarzalne*[3].

Kluczowym w teorii gier jest pojęcie *strategii.* Rozumie się ją tu jako decyzję, w szczególnym przypadku złożoną ze zbioru decyzji cząstkowych (wektor zmiennych decyzyjnych), ewentualnie

[1] Pojęcie *osoby* nie ma tu rzecz jasna znaczenia antropologicznego, tak samo jak *gracz* nie implikuje wprost skojarzeń ze sportem czy hazardem. Pojęcia te używane są dla określenia *podmiotu* zaangażowanego w konflikt, przy czym podmiot ten może być tak zarówno konkretną osobą, jak i grupą osób, a także „naturą”, słowem - *stroną zaangażowaną w konflikt.*

[2] Tego typu gry nazywa się również *grami o sumie stałej.*

[3] Grę powtarzalną traktować można jako wielokrotne rozgrywanie gry jednorazowej. Innym podejściem do problemu wielokrotnie rozpatrywanych sytuacji growych są modele gier dynamicznych, czy ewolucyjnych [182].

sekwencję decyzji, jakie gracz może podjąć. Pojęciu *podjęcie decyzji* odpowiada tu pojęcie *wyboru strategii*[4].

Tabela 2.1 ilustruje wzajemną zależność między pojęciami strategii i wypłaty dla dwóch graczy - gracza A i gracza B. Jest to tzw. *macierz wypłat*. W macierzy tej zilustrowano wypłaty zarówno gracza A, jak i gracza B. Gracze mają tu do wyboru po cztery strategie - gracz A strategie a_1, a_2, a_3 i a_4, gracz B natomiast strategie b_1, b_2, b_3 i b_4. Jeśli gracz A wybierze strategię a_i, a gracz B strategię b_j, to otrzymają oni w ten sposób wypłaty - odpowiednio $V_j^A(a_i)$ i $V_i^B(b_j)$.

Tabela 2.1: Ilustracja pojęć strategia i wypłata.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1			$\vdots$	
a_2	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$[V_3^A(a_2), V_2^B(b_3)]$	$\ldots\ldots$
a_3			$\vdots$	
a_4			$\vdots$	

2.3 Modele gry rynkowej na konkurencyjnym rynku telekomunikacyjnym

Elementy teorii gier posłużą nam do opisu i analizy problemów decyzyjnych związanych z ustalaniem cen za usługi na rynku detalicznym i hurtowym oraz do konstrukcji analitycznych metod wspomagających rozwiązywanie tego typu problemów. Z tego też względu koniecznym jest określenie, czemu odpowiada omawiane wcześniej pojęcie *gry*, kto jest w tej grze *graczem*[5], jakie

[4] Nie należy dopatrywać się tu jakiś ścisłych analogii z pojęciem *strategii* używanym powszechnie w teorii Decyzji [52, 182], czy w Badaniach Operacyjnych [43, 147, 160]. Przypomnijmy, że wprowadza się tam często podział na tzw. decyzje *operacyjne*, *taktyczne* i *strategiczne*. Decyzje strategiczne dotyczą tam decyzji najbardziej ogólnych, długoterminowych, wyznaczających ogólne kierunki (np. rozwoju firmy). W teorii gier pojęcie strategii dotyczyć może - prócz wyżej opisanych - również decyzji bardzo szczegółowych i krótkoterminowych, jednym słowem takich, które we wspomnianych dziedzinach nazwalibyśmy taktycznymi czy operacyjnymi.

[5] Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na pewien subtelny, acz istotny problem natury etycznej i wychowawczej. Aparat pojęciowy teorii gier służy precyzyjnemu określaniu tych części modelu sytuacji growej, którym w rzeczywistości odpowiadają realne byty. Pojęcia teorii gier (problem ten dotyczy wszelkich pojęć) są zawsze uproszczeniem i obejmują zaledwie fragment tej bogatej, realnej rzeczywistości. Problem zaczyna się wtedy, gdy ów uproszczony sposób pojmowania zaczyna dominować sposób postrzegania modelowanej rzeczywistości, zacierając w ten sposób wiele istotnych jej elementów. I tak dla przykładu istnieje realne niebezpieczeństwo, iż stosując

ma do dyspozycji *strategie* i jaką postać przybierają odpowiednie funkcje wypłat. Problemy te są wzajemnie powiązane. Określenie czym jest gra rynkowa dokonuje się najpierw poprzez identyfikację samego rynku. Następnie poprzez identyfikację funkcji wypłat, co implikuje konieczność określenia graczy, którym te funkcje odpowiadają. Określenie strategii wiąże się z identyfikacją zmiennych decyzyjnych każdego z graczy, których wartość w sposób istotny wpływa na wartość funkcji wypłat.

2.3.1 Identyfikacja rynków

Identyfikacja rynku opiera się na kryterium oferowanego produktu lub usługi (kryterium przedmiotowe) oraz na wymiarze geograficznym, z uwzględnieniem kryterium podmiotowego, a niekiedy również i czasowego [8, 25]. Właściwy rynek produktowy obejmuje te wszystkie towary i usługi, które są uznawane przez konsumenta za wzajemnie wymienne lub substytucyjne ze względu na ich właściwości, ceny i przeznaczenie. Definiowanie rynku w wymiarze geograficznym odwołuje się do pojęcia konkurencji. Właściwy rynek geograficzny obejmuje obszar objęty działalnością dostawców lub sprzedawców produktów, na którym warunki konkurencji są podobne lub jednolite. W sektorze telekomunikacyjnym wymiar geograficzny rynku determinowany jest przede wszystkim obszarem sieci. I tak definiuje się rynki lokalne, regionalne, krajowe lub ponadnarodowe. Kryterium podmiotowe dzieli rynki telekomunikacyjne na detaliczne, związane ze świadczeniem usług użytkownikom końcowym oraz na rynki hurtowe, związane z zapewnianiem dostępu do sieci innym przedsiębiorstwom telekomunikacyjnym. Kryterium czasowe dzieli rynki z punktu widzenia okresu czasowego, w jakim świadczone są usługi.

Swoisty podział rynków dokonuje się również z racji na kształt regulacji prawnych, a ściślej mówiąc na podział na tzw. regulację *ex ante* (regulację wyprzedzającą) i regulację *ex post* [138].

Dla przykładu podamy klasyfikację rynków podaną przez Komisję Europejską w rekomendacji 2003/311/EC [23]. Są to tzw. *rynki właściwe*, związane z wyznaczaniem pozycji przedsiębiorstwa, a w szczególności z identyfikacją przedsiębiorstwa o znaczącej pozycji rynkowej. Rekomendacja wymienia:

- Na rynku detalicznym:

zamiennie pojęcia *przedsiębiorstwo telekomunikacyjne* i *gracz*, rzeczywistą działalność przedsiębiorstw zaczniemy postrzegać jedynie jako faktyczną „grę” (czy nawet „gierkę”), w której nie chodzi o nic więcej, jak tylko o zmaksymalizowanie własnej (często jednokryterialnie ujętej w formie zysku) wypłaty. Istotna waga tego problemu tkwi nie tylko w tym, iż zubażamy proces postrzegania rzeczywistości, ale przede wszystkim w tym, iż grozi nam *kreowanie tej rzeczywistości* na obraz tak radykalnie uproszczonego modelu [34, 70, 84, 122]. Z tym istotnym niebezpieczeństwem trzeba się liczyć i o nim pamiętać, ilekroć posługuje się tak uproszczonymi pojęciami, jak *gracz* czy *gra*.

1. Rynek dostępu do abonentów domowych (*residential*) o stałej lokalizacji w publicznej sieci telefonicznej.
2. Rynek dostępu do abonentów biznesowych (*non-residential*) o stałej lokalizacji w publicznej sieci telefonicznej.
3. Rynek publicznie dostępnych usług telekomunikacyjnych na poziomie lokalnym i/lub krajowym dla abonentów domowych o stałej lokalizacji.
4. Rynek publicznie dostępnych usług telekomunikacyjnych na poziomie międzynarodowym dla abonentów domowych o stałej lokalizacji.
5. Rynek publicznie dostępnych usług telekomunikacyjnych na poziomie lokalnym i/lub krajowym dla abonentów biznesowych o stałej lokalizacji.
6. Rynek publicznie dostępnych usług telekomunikacyjnych na poziomie międzynarodowym dla abonentów biznesowych o stałej lokalizacji.
7. Rynek oferowania minimalnego zbioru łączy dzierżawionych.

- Na rynku hurtowym:

1. Rynek usług rozpoczęcia połączenia (*call origination*) w publicznej sieci telekomunikacyjnej, dostarczanych użytkownikom o stałej lokalizacji.
2. Rynek usług zakończenia połączenia (*call termination*) w publicznej sieci telekomunikacyjnej, dostarczanych użytkownikom o stałej lokalizacji.
3. Rynek usług tranzytu ruchu w stałej publicznej sieci telefonicznej.
4. Rynek hurtowego dostępu do uwolnionej metalowej pętli i podpętli abonenckiej dla celów świadczenia szerokopasmowych i głosowych usług.
5. Rynek hurtowego szerokopasmowego dostępu do infrastruktury sieciowej.
6. Hurtowy rynek łączy dzierżawionych dla potrzeb zakończenia połączeń (*Wholesale terminating segments of leased lines*).
7. Hurtowy rynek łączy dzierżawionych dla potrzeb tranzytowych (*Wholesale trunk segments of leased lines*).
8. Rynek dostępu i rozpoczęcia połączenia w publicznej ruchomej sieci telefonicznej.
9. Rynek usług zakończenia połączenia w ruchomej sieci telefonicznej.
10. Narodowy rynek hurtowy międzynarodowych usług roamingowych w publicznych sieciach ruchomych.
11. Rynek usług transmisji rozsiewczej.

2.3.2 Identyfikacja graczy

Identyfikacja graczy w grze rynkowej zdaje się być zagadnieniem prostym. Graczami w grze na danym rynku telekomunikacyjnym są przede wszystkim przedsiębiorstwa telekomunikacyjne prowadzące na tym rynku działalność. Uwzględnić jednakże trzeba również istnienie tzw. *rynków wzajemnie powiązanych*, czyli takich, że istnieje możliwość przenoszenia władzy rynkowej z jednego na drugi [138]. Dla przykładu decyzje co do wysokości taryf za usługi telekomunikacyjne ustanawiane przez operatorów lokalnych mają istotny wpływ na wyniki, jakie osiągają operatorzy międzystrefowi i odwrotnie. I o ile w przypadku, gdy operator międzystrefowy jest podmiotem niezależnym względem operatorów lokalnych, wpływ na wyniki tych ostatnich będzie zasadniczo podobny (efekty rozłożone względnie równomiernie), o tyle w przypadku, gdy operator międzystrefowy jest jednocześnie jednym z operatorów lokalnych, efekt ujęty całościowo może być radykalnie różny[6].

Niejednoznaczną jest tu kwestia roli regulatora. Możliwym jest podejście, w którym regulatora traktuje się jako jednego z graczy, mającego dla danego rynku własny zbiór strategii (możliwych do użycia instrumentów prawno-administracyjnych), oraz celów, związanych z realizowaną polityką, które traktować można jako punkty aspiracji w przestrzeni kryteriów oceny stanu sytuacji rynkowej, czyli jego funkcji wypłat.

W innym ujęciu regulatora nie traktuje się jako jednego z graczy, lecz jako *ograniczenie* na zbiór dopuszczalnych strategii działających na rynku przedsiębiorstw. To podejście, poparte *nota bene* potocznym rozumieniem pojęcia *gracz rynkowy*, jest o tyle słuszne, iż w momencie „rozgrywania gry" przepisy prawne są już ustalone, a wynikające z nich decyzje regulatora w najgorszym przypadku łatwe do przewidzenia. W niniejszej pracy przyjmiemy to drugie podejście.

2.3.3 Identyfikacja strategii

Postrzeganie usługi z punktu widzenia jej użytkownika, jak i podmiotu, który ją świadczy może być bardzo różne. Użytkownik widzi usługę w jej formie finalnej, podczas gdy dostawca usługi widzi jej elementy składowe. Wprowadźmy zatem następującą definicję:

Definicja 2.3.1 *Jednostką usługową - SU_{Aipm} nazywamy elementarną część m usługi bądź usług, świadczonych przez przedsiębiorstwo A, w i-tej strefie numeracyjnej, dla użytkownika o profilu p, z którą związana jest pobierana od użytkownika opłata P_{Aipm}.*

[6] Wiąże się to z problemem tzw. krossubsydiowania, czyli wspieraniem jednej, mniej dochodowej działalności przez inną, bardziej dochodową, co z uwzględnieniem licznych uzasadnień natury społecznej może stanowić silne narzędzie walki z konkurencją.

Jednostka usługowa jest pojęciem ogólnym (tak jak ogólnym jest pojęcie użytkownika [138]) i dotyczyć może usług świadczonych zarówno na rynku detalicznym, jak i hurtowym. W szczególności jednostka usługowa może być samą usługą, jak to jest np. w przypadku usługi związanej z zapewnieniem dostępu do sieci, z którą związana jest stała opłata abonamentowa lub też częścią usługi, jak to jest dla przykładu z usługą rozpoczęcia połączenia, która może wchodzić w skład usługi połączenia, realizowanego między abonentami dwóch różnych sieci. Pojęcie jednostki usługowej może być również przypisane do usługi, z uwzględnieniem rozróżnienia na czas jej świadczenia. Dla przykładu usługa lokalnego połączenia telefonicznego w godzinach szczytu stanowić może inną jednostkę usługową, niż ta sama usługa świadczona w godzinach poza szczytem, jeśli tylko świadczący ją operator[7] uwzględniał będzie możliwość ustalenia w obu przypadkach różnych cen[8].

Korzystając z powyższej definicji jednostki usługowej SU_{Aipm} oraz odpowiadającej jej ceny P_{Aipm} zdefiniujemy pojęcie strategii:

Definicja 2.3.2 *Strategią a_j przedsiębiorstwa A nazywamy zbiór par $\{(SU_{Aipm}, P^j_{Aipm})\}$.*

Zgodnie z definicją 2.3.2 strategia a_j będzie strategią *identyczną* ze strategią a_k wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej jednostki usługowej SU_{Aipm}, zachodzić będzie zależność:

$$P^j_{Aipm} = P^k_{Aipm}$$

Strategia a_j będzie natomiast strategią *różną* od strategii a_k, jeśli dla co najmniej jednej jednostki usługowej SU_{Aipm}, zachodzić będzie zależność:

$$P^j_{Aipm} \neq P^k_{Aipm}$$

Przy takiej definicji pojęcia strategii widzimy, iż przedsiębiorstwa telekomunikacyjne mają do wyboru jedynie tzw. *strategie czyste* tzn., nie mogą jednocześnie wybrać więcej niż jednej strategii (brak tzw. *strategii mieszanych*). Z faktu tego wynika, iż odpowiednie gry rynkowe mogą nie posiadać rozwiązań równowagowych[9], a co za tym idzie gracze mogą często zmieniać swoje strategie, w skutek czego sytuacja na rynku będzie niestabilna.

[7] *Operatorem* nazywamy przedsiębiorstwo telekomunikacyjne posiadające własną infrastrukturę sieciową.

[8] Podkreślmy wyraźnie, iż chodzi tu o potencjalną możliwość ustalenia różnych cen, a nie o faktyczną ich różnicę.

[9] Rozwiązaniem równowagowym gry (tzw. punktem równowagi Nasha) nazywamy taki zbiór wybranych strategii, dla którego żadnemu z graczy nie opłaca się zmieniać swojej strategii gry, jeżeli tylko ma pewność, że pozostali gracze swoich strategii nie zmienią. Dla gry w postaci normalnej jest to taka łączna decyzja $\mathbf{x}^* \in X_0$ (X_0 - zbiór decyzji dopuszczalnych), że:

$$f_i(x_1^*, \ldots x_i^*, \ldots x_n^*) \geqslant f_i(x_1^*, \ldots x_i, \ldots x_n^*), \forall \mathbf{x} \in X_0, \forall i = 1, \ldots n$$

2.3.4 Identyfikacja funkcji wypłaty

Funkcja wypłaty stanowi kryterium oceny wyniku gry, a zatem i kryterium oceny decyzji (wybranej strategii), jaką podjął dany gracz. Należy mieć świadomość, iż takich kryteriów oceny może być bardzo wiele[10]. W niniejszej pracy ograniczymy się do czterech zasadniczych rodzajów kryteriów, bazujących na modelu popytu na świadczone usługi i modelu ponoszonych przez przedsiębiorstwa kosztów.

Kryteria popytu i liczby użytkowników

Załóżmy istnienie modelu popytu na usługi telekomunikacyjne, składającego się z dwóch modeli składowych[11]:

- Model funkcji popytu - D_{Aputn}^{XiYj} - wielkość ruchu przenoszonego przez sieć operatora A, związanego z realizacją usługi u, w chwili czasowej t i dniu tygodnia n, generowanego przez użytkownika o profilu p w i-tej strefie operatora X, w relacji połączenia z użytkownikiem w j-tej strefie operatora Y.
- Model liczby użytkowników - U_{Aip} - liczba użytkowników o profilu p, korzystających z usług przedsiębiorstwa A, w i-tej strefie numeracyjnej.

Dla modelu funkcji popytu w szczególnym przypadku może zachodzić:

- $(X = Y = A)$ - dla ruchu zamykającego się w sieci operatora A (lokalnego, jeśli $i = j$ i międzystrefowego, jeśli $i \neq j$).
- $(X = A \neq Y)$ - dla ruchu rozpoczynającego się w i-tej strefie operatora A i kończącego się w j-tej strefie operatora Y.
- $(X \neq A = Y)$ - dla ruchu rozpoczętego w i-tej strefie operatora X i kończącego się j-tej strefie operatora A.
- $(X \neq A \neq Y)$ - dla ruchu wychodzącego z sieci operatora X i kierowanego do sieci operatora Y, tranzytowanego przez sieć operatora A.

Przy założeniu różniczkowalności funkcji wypłaty $f_i(\mathbf{x})$ wynika stąd układ poniższych warunków koniecznych [182]:

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0, \forall i = 1, \ldots n$$

[10] Teoretycznie nieskończenie wiele [142].

[11] Przyczynek do powstania takiego modelu znaleźć można w pracy [111] oraz w Dodatku F.

Modele powyższe mają charakter wyjść (*outcomes*), których wartości zależą (między innymi) od przyjętych w naszym modelu strategii, czyli cen za poszczególne jednostki usługowe. Dlatego też modele te traktować możemy jako funkcje kryteriów oceny skutku wybranych przez graczy strategii. Są to kryteria najbardziej elementarne w naszym modelu. Na ich podstawie zbudować możemy wiele różnorodnych kryteriów zaagregowanych. Dla przykładu poniżej podajemy kilka spośród nich.

- Kryteria popytu
  - Kryterium całkowitej wielkości ruchu, związanego z realizacją usługi u, generowanego przez wszystkich użytkowników w i-tej strefie operatora A:
  $$D_{Aiu} = \sum_{Y,j} \sum_{p} \sum_{t,n} D_{Aputn}^{AiYj} \cdot U_{Aip}$$
  - Kryterium całkowitej wielkości ruchu zamykającego się w strefie i (ruch lokalny), sieci operatora A (ruch generowany w relacji $Ai - Ai$):
  $$D^{AiAi} = \sum_{p,u,t,n} D_{Aputn}^{AiAi} \cdot U_{Aip}$$
  - Kryterium całkowitego ruchu generowanego w i-tej strefie sieci operatora A i wychodzącego do j-tej strefy operatora B (ruchu generowanego w relacji $Ai - Bj$):
  $$D^{AiBj} = \sum_{p,u,t,n} D_{Aputn}^{AiBj} \cdot U_{Aip}$$
  - Kryterium całkowitego ruchu przychodzącego z sieci operatora B do sieci operatora A:
  $$D^{BA} = \sum_{i,j} \sum_{p,u,t,n} D_{Bputn}^{BjAi} \cdot U_{Bjp}$$
  - Kryterium całkowitego ruchu obsługiwanego w sieci przez operatora A w godzinach szczytu ($t = s$), w dniach pracujących ($n = w$):
  $$D_{Asw} = \sum_{i,j} \sum_{p,u} D_{Apusw}^{AiAj} \cdot U_{Aip} + \sum_{i,Y,j} \sum_{p,u} D_{Apusw}^{AiYj} \cdot U_{Aip} + \sum_{Y,j,i} \sum_{p,u} D_{Bpusw}^{YjAi} \cdot U_{Yjp}$$
  - Kryterium stosunku ruchu przychodzącego do wychodzącego w sieci operatora A, połączonej z siecią operatora B:
  $$D_A^{T/O} = \sum_{i,j} \sum_{p,u,t,n} \frac{D_{Bputn}^{BjAi} \cdot U_{Bjp}}{D_{Aputn}^{AiBj} \cdot U_{Aip}}$$
- Kryteria liczby użytkowników

– Kryterium liczby użytkowników o profilu p przedsiębiorstwa A:

$$U_{Ap} = \sum_i U_{Aip}$$

– Kryterium całkowitej liczby użytkowników przedsiębiorstwa A:

$$U_A = \sum_{i,p} U_{Aip}$$

– Kryterium udziału w rynku użytkowników o profilu p przedsiębiorstwa A:

$$U_{Ap}^{wzg} = \frac{\sum_i U_{Aip}}{\sum_{X,j} U_{Xjp}}$$

Kryteria kosztów i zysków

Jedna z możliwych klasyfikacji dzieli ponoszone przez przedsiębiorstwa koszty na tzw. koszty stałe, niezależne od wielkości produkcji (zakresu oferowanych usług) i na tzw. koszty zmienne, od wielkości produkcji zależne [73, 128, 164]. Z racji na fakt, iż strategie graczy opierają się na cenach za poszczególne jednostki usługowe, stąd też za kosztowe kryteria oceny wyniku gry przyjąć należy te z funkcji kosztów, na których wartość (w sposób pośredni) te ceny mają wpływ. Będą to zatem te spośród funkcji kosztów, które uzależnione są od wielkości przenoszonego ruchu oraz od liczby użytkowników sieci[12]. Dla przykładu mogą to być następujące koszty:

- K_{Au}^{XiYj} - koszt zmienny, ponoszony przez przedsiębiorstwo A, związany z przenoszeniem ruchu dla celów realizacji usługi u w relacji $Xi - Yj$. Przy czym w szczególnym przypadku może zachodzić:
  - $(X = Y = A)$ - dla ruchu zamykającego się w sieci operatora A (lokalnego, jeśli $i = j$ i międzystrefowego, jeśli $i \neq j$).
  - $(X = A \neq Y)$ - dla ruchu rozpoczynającego się w i-tej strefie operatora A i kończącego się w j-tej strefie operatora Y.
  - $(X \neq A = Y)$ - dla ruchu rozpoczętego w i-tej strefie operatora X i kończącego się j-tej strefie operatora A.
  - $(X \neq A \neq Y)$ - dla ruchu wychodzącego z sieci operatora X i kierowanego do sieci operatora Y, tranzytowanego przez sieć operatora A.
- K_{Aip}^I - uśredniony koszt instalacji pojedynczego łącza abonenckiego dla użytkownika o profilu p w i-tej strefie operatora A.

[12] Na temat modelowania kosztów świadczenia usług telekomunikacyjnych zobacz prace [146, 184].

- K^{M}_{Aip} - uśredniony koszt utrzymania pojedynczego łącza abonenckiego dla użytkownika o profilu p w i-tej strefie operatora A.
- $K^{IB_{POI}}_{Al}$ - uśredniony koszt instalacji pojedynczego punktu połączeniowego POI, ponoszony przez operatora A łączącego swą sieć z siecią operatora B, na l-tym poziomie interconnectu[13].
- $K^{MB_{POI}}_{Al}$ - uśredniony koszt utrzymania pojedynczego punktu połączeniowego POI, ponoszony przez operatora A połączonego z operatorem B, na l-tym poziomie interconnectu.

Kryteria kosztowe definiować można dla poszczególnych jednostek usługowych, dla ich grup, dla poszczególnych rynków, dla usług związanych z przenoszeniem ruchu w określonej relacji, jak również w sensie całkowitego kosztu ponoszonego przez przedsiębiorstwo.

Zysk Z_A przedsiębiorstwa A definiowany jest jako różnica osiąganych przez nie przychodów R_A, oraz ponoszonych kosztów K_A.

$$Z_A = R_A - K_A$$

Przychody czerpane są z wszelkiej działalności usługowej (z każdej jednostki usługowej SU), jaką przedsiębiorstwo prowadzi, a ich całkowita wartość wyraża się zależnością

$$R_A = \sum_{i,p,m} D_{Aipm} \cdot P_{Aipm}$$

gdzie D_{Aipm} jest ilością oferowanej jednostki usługowej SU_{Aipm}. Podobnie jak rzecz się ma w przypadku kryteriów kosztowych, kryteria zysku definiować można dla poszczególnych jednostek usługowych, dla ich grup, dla poszczególnych rynków, dla usług związanych z przenoszeniem ruchu w określonej relacji, jak również w sensie całościowego wyniku finansowego przedsiębiorstwa.

Jakościowy podział kryteriów

W zależności od preferencji gracza (przyjętej polityki działania), każde z wyżej wymienionych kryteriów może być maksymalizowane, minimalizowane lub stabilizowane[14]. Każdy rodzaj kryterium sprowadzić można w sposób prosty do kryterium maksymalizowanego. Zachodzą bowiem

[13] Przez poziom interconnectu (patrz punkt 1.2.3 w rozdziale 1) rozumiemy jeden z czterech możliwych przypadków: bezpośredni dostęp do pętli abonenckiej ($l = 0$), połączenie na poziomie lokalnym ($l = 1$), połączenie na poziomie międzystrefowym z pojedynczym tranzytem ($l = 2$), połączenie na poziomie międzystrefowym z podwójnym tranzytem ($l = 3$). Połączenia międzynarodowe traktować można jako ostatni z wymienionych poziomów ($l = 3$).

[14] Zdawać się może, iż to twierdzenie jest nieco przesadzone. Powszechny pogląd opiewa bowiem oczywiste zdaje się twierdzenie, iż przedsiębiorstwa dążą do maksymalizacji udziału w rynku, maksymalizacji zysków, czy do

następujące zależności:

$$\text{minimize} f = \text{maximize} - f$$

oraz

$$\text{stabilize} f = \text{maximize} \frac{1}{|\hat{f} - f| + 1}$$

gdzie $\hat{f}$ jest wartością funkcji f, wokół której chcemy ją stabilizować.

2.3.5 Rodzaje gier na rynku telekomunikacyjnym i ich własności

Pojedyncze kryterium oceny wyniku gry rozpatrywane na danym rynku (np. kryterium maksymalizacji zysku czerpanego z telefonicznych usług lokalnych) definiuje nam jednokryterialną grę rynkową. Liczba jednokryterialnych gier rynkowych odpowiada liczbie możliwych i rozsądnie wybranych kryteriów oceny wybranej strategii. Z jednokryterialnych gier rynkowych możemy tworzyć gry wielokryterialne, dla których funkcja wypłaty jest wektorem, którego poszczególne składowe stanowią kryteria oceny z gier jednokryterialnych [182].

Zgodnie z przyjętą klasyfikacją kryteriów dokonać możemy następującego podziału gier jednokryterialnych:

- Gry o wielkość ruchu
- Gry o liczbę użytkowników
- Gry o koszt
- Gry o zysk

Każda z gier posiada ten sam zbiór możliwych strategii gry[15]. Gry te zatem są ze sobą powiązane i decyzje podejmowane w ramach jednej gry wpływają na wyniki uzyskiwane w pozostałych grach.

minimalizacji ponoszonych kosztów. Realia rynków poddanych kontroli, nakładającej na przedsiębiorstwa liczne obowiązki i ograniczenia w zależności od zajmowanej przez nie pozycji rynkowej, jak to jest przykładowo z operatorami posiadającymi znaczącą pozycję rynkową, słuszność tego twierdzenia poddają w wątpliwość. (Informacje na temat aktualnych i historycznych obowiązków, nakładanych na przedsiębiorstwa o znaczącej (ewentualnie dominującej) pozycji rynkowej znaleźć można w pracach [47, 53, 64, 77, 78, 82, 94, 138, 139, 140, 143, 154, 186, 189, 194]). I tak dla przykładu, przedsiębiorstwo, które zbliża się do granicy, po przekroczeniu której zostanie uznane za posiadające znaczącą pozycję rynkową na danym rynku, może dążyć do ustabilizowania swojej aktualnej pozycji (udziału w rynku, zysku). Przedsiębiorstwo, na które nałożono obowiązek ustalania cen za usługi w oparciu o ponoszone koszty, może dążyć do (choćby w sposób sztuczny) zwiększania (maksymalizowania) tychże kosztów itd. Ponadto, z racji na fakt, iż dany gracz rozpatruje nie tylko własne wartości kryteriów, ale również wartości kryteriów konkurentów, może te ostatnie traktować w sposób przeciwny względem własnych, dążąc do pogorszenia sytuacji konkurenta.

[15] Dotyczy to także gier wielokryterialnych.

Każdy z graczy rynkowych *bierze udział* w każdej z gier w tym sensie, że jego decyzje (wybrane strategie) wpływają na wartości funkcji wypłat każdego z graczy w każdej grze. Przyjęta polityka działania, a więc preferencje co do ważności poszczególnych kryteriów oceny, wprowadzają tu pewien porządek - choć gracze biorą udział w każdej grze, to ich zainteresowanie wynikami w każdej z gier może być różne. Powiemy zatem, że gracz *gra* w daną grę, jeśli jest zainteresowany wynikami tej gry, czyli jeśli traktuje funkcję wypłaty z tej gry jako kryterium (jedyne lub jedno z wielu) oceny wybranej przez siebie strategii. Funkcję wypłaty z gry, w którą gracz gra nazwiemy *kryterium istotnym* dla gracza. Funkcje wypłat z gier, w które gracz nie gra (choć bierze w nich udział) nazwiemy *kryteriami nieistotnymi*.

Dla poszczególnych rodzajów gier zachodzą następujące właściwości:

- Gry o wielkość ruchu - funkcje wypłaty oparte są na modelu popytu.
- Gry o liczbę użytkowników - funkcje wypłaty oparte są na modelu liczby użytkowników (element modelu popytu).
- Gry o koszt - funkcje wypłaty oparte są na modelu kosztów i modelu popytu.
- Gry o zysk - funkcje wypłaty oparte są na modelu popytu i modelu kosztów.

Aby dany gracz mógł grać w grę w sposób racjonalny musi znać własną funkcję wypłaty[16], jak również potencjalnie możliwe własne strategie gry oraz strategie pozostałych graczy. W naszym przypadku sprowadza się to do znajomości odpowiedniego modelu (popytu i/lub kosztów), na którym dana funkcja jest oparta, a także na znajomości jednostek usługowych, jakie świadczyć mogą przedsiębiorstwa oraz na znajomości potencjalnych poziomów opłat, pobieranych za ich świadczenie.

Model popytu opisuje zachowanie się użytkowników, a zatem jest wspólny dla wszystkich graczy (wszystkich przedsiębiorstw). Wynika z tego, iż grając w grę, w której funkcja wypłaty oparta jest wyłącznie na modelu popytu (gry o wielkość ruchu i gry o liczbę użytkowników), dany gracz jest w stanie przewidzieć wartości wypłat, jakie sam osiągnie, jak również jakie osiągną pozostali gracze dla każdej z możliwych kombinacji wybranych przez graczy strategii gry.

Model kosztu związany jest z konkretnym przedsiębiorstwem i w szczególnym przypadku nie musi być znany pozostałym graczom. Wynika stąd, iż w grach, w których funkcja wypłaty oparta jest na modelu kosztów (gry o koszt i gry o zysk), dany gracz może, lecz nie musi znać funkcji wypłat pozostałych graczy.

Problem znajomości potencjalnych strategii wszystkich graczy jest teoretycznie prosty, wystarczy bowiem przyjąć, iż gracze mogą świadczyć wszystkie usługi, jakie są aktualnie dostępne lub

[16] W formie analitycznej, bądź w formie odpowiednich przyporządkowań *decyzje graczy - wypłata*.

planowane w bliższej lub dalszej przyszłości oraz założyć dostatecznie szerokie spektrum możliwych cen za poszczególne jednostki usługowe, na których te usługi bazują. W praktyce jednakże może to nastręczać niemałych trudności, bowiem liczba strategii rośnie wykładniczo ze wzrostem liczby jednostek usługowych (patrz Dodatek E). Problem ten jest istotny wówczas, gdy korzysta się z metod optymalizacyjnych bazujących na przeglądzie całego zbioru potencjalnych decyzji, jak to jest przykładowo w analizie gier w postaci macierzowej. Stąd też, dla dużych problemów koniecznym jest albo ograniczanie zbioru możliwych strategii, albo stosowanie metod optymalizacyjnych, w których zbiór możliwych rozwiązań nie jest przechowywany w sposób jawny [149].

Macierz wypłat jest uporządkowaną postacią reprezentacji wartości wypłat (wartości funkcji wypłaty) gracza dla wszystkich kombinacji wybranych strategii każdego z graczy. Powiemy zatem, iż gracz *zna własną macierz* wypłat, jeśli zna własną funkcję wypłaty oraz potencjalne strategie gry każdego z graczy oraz, iż gracz zna macierz wypłat innego gracza, jeśli zna jego funkcję wypłaty oraz potencjalne strategie gry wszystkich graczy[17].

Gry, w których gracz zna własną macierz wypłaty, oraz macierz wypłat innych graczy nazywamy w teorii gier *N-osobowymi grami o sumie zerowej* bądź *niezerowej* w zależności od postaci macierzy[18]. W naszym przypadku należy się spodziewać, iż będziemy mieli do czynienia z grami o sumie niezerowej[19]. Gry, w których gracz zna jedynie własną macierz wypłat nazywane są w Teorii gier *grami przeciwko naturze*. Stąd, zakładając, że gracze grają w tę samą jednokryterialną grę, dokonać możemy kolejnej klasyfikacji:

- *N-osobowe gry o sumie niezerowej*
  - Gry o wielkość ruchu.
  - Gry o liczbę abonentów.
  - Gry o koszt, jeśli znany jest model kosztów innych graczy.
  - Gry o zysk, jeśli znany jest model kosztów innych graczy.
- *Gry przeciwko naturze*

[17] Podkreślmy wyraźnie, iż znajomość macierzy wypłat nie oznacza tu faktycznego przechowywania jej całej postaci, a jedynie możliwość odczytania każdego z jej elementów (wartości funkcji wypłaty dla dowolnej kombinacji wybranych przez graczy strategii).

[18] Przypomnijmy, gra jest grą o sumie zerowej (inaczej - o sumie stałej), jeśli suma odpowiednich współczynników (wartości funkcji wypłaty dla tej samej kombinacji strategii) z każdej macierzy jest wartością stałą niezależnie od wybranych strategii.

[19] To, co zyska dane przedsiębiorstwo, nie równa się sumie tego, co straciły pozostałe. Będzie tak nawet w grze o liczbę użytkowników. Należy pamiętać, iż nawet jeśli dana liczba użytkowników zmienia przedsiębiorstwo, z którego usług będzie korzystać (np. z A na B), to jednocześnie dołączają się nowi użytkownicy, którzy dotychczas nie korzystali z usług w ogóle.

  - Gry o koszt, jeśli nieznany jest model kosztów innych graczy.
  - Gry o zysk, jeśli nieznany jest model kosztów innych graczy.

Jeśli gracze nie grają w tę samą grę, wówczas zajść może jedna z sytuacji:

- *Dany gracz, np. A wie w jakie gry grają pozostali gracze.*

  W tym przypadku gracz A może przyjąć, iż gracze pozostali grają w tę samą grę co on, a za ich macierze wypłat w tej grze przyjąć macierze z gier, w które oni grają[20], pod warunkiem, że je zna. Z punktu widzenia gracza A gra taka sprowadzi się zatem do N-osobowej gry o sumie niezerowej, jeśli A zna macierze wypłat pozostałych graczy oraz do gry przeciwko naturze, jeśli tych macierzy nie zna.

- *Gracz A nie wie w jakie gry grają pozostali gracze*[21].

  W tym przypadku gracz A nie może określić, na analizie jakiej macierzy wypłat pozostali gracze będą opierali swoje decyzje. Jest to zatem sytuacja zbliżona, choć nie równoznaczna z grą przeciwko naturze. Jeśli gracz A nie zna modelu kosztów pozostałych graczy, a istnieje duże prawdopodobieństwo, że grać oni mogą w którąś z gier, dla których funkcja wypłaty na tym modelu się opiera, wówczas rozsądnie jest przyjąć, iż jest to gra przeciwko naturze. W przypadku, gdy A zna model kosztów pozostałych graczy, wówczas może zastosować następujące podejście: Zakładając, iż znane są mu prawdopodobieństwa[22] p_{kj}, że gracz k gra w j-tą grę, wówczas może przyjąć, iż gracz k gra w grę, dla której funkcja wypłaty f_k^* przybiera postać wartości oczekiwanej z wypłat w poszczególnych grach:

  $$f_k^* = \sum_j p_{kj} \cdot f_{kj}$$

  gdzie f_{kj} jest funkcją wypłaty gracza k z gry j. Postępując w ten sposób z kolejnymi graczami uzyskamy model N-osobowej gry o sumie niezerowej.

Możliwą jest sytuacja, gdy gracz wie w jakie gry gra część graczy, a odnośnie pozostałych graczy takiej informacji nie posiada. Wówczas możemy przyjąć, iż jest to K-osobowa gra o sumie niezerowej (gdzie K jest liczbą graczy, których znana jest macierz wypłat[23]), której wyniki zależą od „stanów natury”, rozumianych jako możliwe strategie gry pozostałych $N - K$ graczy.

Założenie, iż przedsiębiorstwa telekomunikacyjne rozpatrują tylko jedno kryterium oceny wyniku swoich decyzji, jest założeniem niewątpliwie upraszczającym. W praktyce bowiem mamy

[20] Wynika to z faktu, że wszystkie gry mają ten sam zbiór dopuszczalnych strategii gry.

[21] Do tego przypadku zaliczyć można również ten, gdy gracze grają w tę samą grę, lecz nie są tego świadomi.

[22] Jeśli prawdopodobieństwa p_{kj} są dla gracza A nieznane, wówczas z konieczności musi przyjąć, że są sobie równe i wynoszą $p_{kj} = \frac{1}{J}$, gdzie J jest liczbą możliwych gier.

[23] Ściślej mówiąc K jest liczbą graczy, których macierz wypłat znana jest graczowi A (jednym z tych graczy jest również A).

do czynienia z wieloma kryteriami oceny (gracze grają w wiele gier jednocześnie). W szczególnych przypadkach można jednakże przyjmować, że pewne kryteria oceny są dla danego przedsiębiorstwa na tyle istotne[24], że jednokryterialne ujęcie problemu jest uproszczeniem akceptowalnym[25]. W ogólności jednak grę rynkową na rynku usług telekomunikacyjnych traktować należy jako grę wielokryterialną. Podział gier jednokryterialnych na gry przeciwko naturze i N-osobowe gry o sumie niezerowej nie traci jednakże swej użyteczności. Wynika to z faktu, iż gra wielokryterialna nie jest niczym innym, jak zbiorem wzajemnie powiązanych gier jednokryterialnych. By rozwiązać problem złożony, trzeba umieć rozwiązać szereg podproblemów, które się nań składają. By zrozumieć istotę problemu wielokryterialnego, trzeba zrozumieć istotę każdego z kryteriów jego oceny[26].

2.4 Podsumowanie

Teoria Gier i Teoria Decyzji wykształciły szereg narzędzi wspomagania decyzji graczy w zależności od modelu gry. Wyżej zarysowana klasyfikacja, dzieląca gry na rynku usług telekomunikacyjnych na gry przeciwko naturze, N-osobowe gry o sumie niezerowej i gry wielokryterialne, umożliwia adaptację tych narzędzi do rzeczywistych problemów, przed jakimi stają decydenci reprezentujący przedsiębiorstwa telekomunikacyjne biorące udział w różnych grach rynkowych. Ilustracji tych narzędzi (również autorskich) i ich przykładów zastosowania w sytuacjach modelowanych przez gry przeciwko naturze poświęcona zostanie dalsza część pracy.

[24] Np. kryterium liczby użytkowników dla przedsiębiorstwa, które dopiero wchodzi na rynek; kryterium zysku, dla przedsiębiorstwa, któremu grozi bankructwo, lub które potrzebuje kapitału na wdrożenie nowej, kosztownej technologii; kryterium ruchu w relacji długodystansowej dla operatora sieci lokalnej, który zaczyna świadczyć usługi połączeń międzystrefowych itp.

[25] W istocie rzeczy preferencje, którym odpowiada leksykograficzna postać funkcji skalaryzującej w optymalizacji wielokryterialnej nie są niczym innym, jak jednokryterialnym ujmowaniem problemu do chwili napotkania niejednoznaczności rozwiązania [131, 182].

[26] Rzecz jasna do zrozumienia problemu wielokryterialnego nie wystarcza analiza szeregu problemów jednokryterialnych. Dla pełnego zrozumienia koniecznym jest również spojrzenie na zależności między kryteriami, które są odbiciem modelu preferencji decydenta.

Rozdział 3

Analiza jednokryterialnych gier przeciwko naturze

3.1 Wprowadzenie

Model gry przeciwko naturze stanowi dobre narzędzie opisu sytuacji decyzyjnej danego gracza, przy założeniu nieznajomości macierzy wypłat konkurencyjnych graczy w jednokryterialnej grze rynkowej. Zgodnie z rozważaniami przeprowadzonymi w rozdziale 2 nieznajomość macierzy wypłat graczy konkurencyjnych w wyróżnionych grach na rynku telekomunikacyjnym oznacza z reguły nieznajomość modeli kosztów tych graczy. W przypadku, gdy dany gracz zna *a priori* strategie wybrane przez konkurentów, jego problem decyzyjny jest prosty i sprowadza się do optymalizacji własnej funkcji wypłaty, dla której wybrane przez konkurentów strategie traktowane są jako parametry. W przypadku, gdy gracz nie zna *a priori* decyzji konkurentów[1], swoje decyzje opierać musi wyłącznie na analizie własnej macierzy wypłat i pewnej subiektywnie wybranej racjonalnej procedurze wyboru strategii, będącej odbiciem jego stosunku do niepewności, jaka w tym problemie decyzyjnym jest zawarta.

3.2 Kryteria wyboru strategii w grach przeciwko naturze

Rozpatrujemy przypadek, w którym przedsiębiorstwo telekomunikacyjne - gracz A, zna wyłącznie własną funkcję wypłaty definiującą jednokryterialną grę, w którą to przedsiębiorstwo gra. Przy założeniu znajomości potencjalnych strategii gry konkurentów oraz konieczności podejmowania

[1] W sensie ścisłym tylko ten przypadek winien być określany jako gra przeciwko naturze. W tego typu grach zakłada się bowiem, iż stany natury, którym tu odpowiadają wybrane przez konkurentów strategie nie są *a priori* znane.

decyzji jako pierwszy, grę te traktować możemy jako grę przeciwko naturze, w której stanowi natury odpowiada iloczyn kartezjański strategii wybranych przez pozostałych graczy. Jeśli przyjmiemy, iż gracz $X \neq A$ ma $\mathcal{I}_X$ dopuszczalnych strategii, to liczba dopuszczalnych stanów natury $\mathcal{I}_N$ równa będzie $\mathcal{I}_N = \prod_X \mathcal{I}_X$. Dla uproszczenia naturę określali będziemy jako gracza N, jego j-tą strategię oznaczymy przez n_j. W szczególnym przypadku, gdy w danej grze bierze udział tylko dwóch graczy A i B, j-ty stan natury odpowiadał będzie j-tej strategii gracza B ($n_j = b_j$). W ujęciu macierzowym, przy założeniu, iż gracz A i gracz N mają po trzy strategie, grę tę z punktu widzenia gracza A przedstawić można w postaci jak w tabeli 3.1. $V_j^A(a_i)$ oznacza tu

Tabela 3.1: Macierz wypłat dla gracza A.

	n_1	n_2	n_3
a_1	$V_1^A(a_1)$	$V_2^A(a_1)$	$V_3^A(a_1)$
a_2	$V_1^A(a_2)$	$V_2^A(a_2)$	$V_3^A(a_2)$
a_3	$V_1^A(a_3)$	$V_2^A(a_3)$	$V_3^A(a_3)$

wielkość wypłaty dla gracza A, gdy wybrał on strategię a_i, a gracz N wybrał strategię n_j. Przy takim modelu gry, gracz A w swoich decyzjach dotyczących wyboru strategii, w zależności od jego aspiracji, stosunku do ryzyka i wybranej miary oceny otrzymanego wyniku kierować się może jednym z racjonalnych kryteriów wyboru strategii[2]. W Dodatku A zilustrowano znane z literatury jak również autorskie kryteria wyboru strategii w tego typu sytuacjach decyzyjnych. Sposób wykorzystywania tych kryteriów w konkretnym problemie decyzyjnym ilustruje poniższy przykład.

Przykład 3.1

Na rynku telefonicznych usług lokalnych funkcjonuje trzech operatorów - A, B i C. Rozpatrujemy grę z punktu widzenia operatora A. Operator A przygotowuje się do wejścia na nowe rynki lokalne. Wiąże się to z koniecznością poczynienia dużych inwestycji, a zatem i ze zdobyciem dużego kapitału. Z tego powodu A dąży do szybkiej maksymalizacji zysku, czerpanego z działalności prowadzonej na dotychczasowym obszarze. Z analiz rynkowych oraz przeprowadzonego wywiadu A wie, iż B stawia sobie w najbliższej perspektywie podobny, jednokryterialnie ujęty

[2] Dotychczas w pracy mówiliśmy o kryterium, jako o *funkcji oceny* wybranej strategii, funkcji wypłaty, funkcji definiującej jednokryterialną grę rynkową (np. funkcja zysku, funkcja kosztów, funkcja udziału w rynku itp.). Użyte w tym miejscu pojęcie kryterium, rozumiane jako *procedura wyboru* strategii, jest w istocie rzeczy również kryterium w sensie funkcji oceny. Jest to kryterium zaagregowane, swoista funkcja skalaryzująca, w której przyjmuje się określony typ agregacji niepewności.

cel - zysk, zaś C prowadzi dość unormowaną politykę cenową. Operator A zna wyłącznie własny model kosztów świadczenia usług. Sieci poszczególnych operatorów są wzajemnie połączone, a zawarte umowy interconnectowe ustalają wysokości stawek rozliczeniowych na względnie długi (znacząco dłuższy, niż umowy zawierane z abonentami) okres czasu. Dobiega końca okres trwania umów zawartych między operatorem A, a najbardziej dochodowymi jego abonentami. Zbliża się również koniec trwania umów zawartych z abonentami przez pozostałych operatorów, moment ten jednakże wypaść ma nieco później. W obecnej sytuacji każdy z operatorów pobiera opłaty od abonentów z wyróżnieniem opłaty abonamentowej oraz opłaty za czas trwania połączenia (zróżnicowanej na trzy grupy: w godzinach szczytu dnia tygodnia, godziny poza szczytem oraz weekendy). Zdecydowanie największe dochody przynosi ruch przesyłany w godzinach szczytu, dlatego uwaga operatora A skupia się na trafnym doborze cen dla tego przedziału (z analiz wynika, iż popyt na usługi poza szczytem i weekendy jest bardzo mały i silnie elastyczny).

Operator A rozpatruje cztery własne strategie gry:

a_1 - utrzymać aktualny poziom cen

a_2 - zmniejszyć o 10% cenę połączeń w godzinach szczytu

a_3 - zmniejszyć o 15% cenę połączeń w godzinach szczytu i podnieść o 5% cenę abonamentu

a_4 - zwiększyć o 10% cenę abonamentu

Operator A spodziewa się, iż najbardziej korzystna strategia, jaką w odpowiedzi wybierze operator B, będzie należała do tej grupy czterech strategii, stąd $b_i = a_i$, zaś zbiór rozważanych przez C strategii składa się z dwóch strategii:

c_1 - utrzymać aktualny poziom cen

c_2 - zmniejszyć o 10% cenę połączeń w godzinach szczytu

Z racji na nieznajomość modelu kosztów operatorów B i C, z punktu widzenia operatora A sytuacja ta odpowiada modelowi gry przeciwko naturze. Natura N, reprezentująca operatorów B i C posiada tu osiem strategii:

$$
\begin{aligned}
n_1 &= (b_1, c_1)\\
n_2 &= (b_2, c_1)\\
n_3 &= (b_3, c_1)\\
n_4 &= (b_4, c_1)\\
n_5 &= (b_1, c_2)\\
n_6 &= (b_2, c_2)\\
n_7 &= (b_3, c_2)\\
n_8 &= (b_4, c_2)
\end{aligned}
$$

Przyjmijmy, iż dla poszczególnych strategii wyliczone w oparciu o model popytu i model kosztów wartości rocznych zysków (w milionach złotych) operatora A przedstawiają się jak w tabeli 3.2.

Tabela 3.2: Przykładowa macierz wypłat operatora A w grze o zysk na rynku telefonicznych usług lokalnych.

	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8
a_1	6	5	4	7	5	4	3	6
a_2	8	4	3	5	7	3	2	4
a_3	7	6	3	6	6	4	2	5
a_4	5	6	6	7	4	5	5	6

To, którą ze strategii powinien wybrać operator A uzależnione jest, jak już to powiedziano od jego aspiracji, stosunku do ryzyka i wybranej miary oceny otrzymanego wyniku. Jeżeli operator ten zakładał będzie skrajny optymizm odnośnie odpowiedzi pozostałych graczy, wówczas kierować się winien kryterium maksymalizacji największej wypłaty - kryterium Optymistycznym postaci:

$$\max\{\max_j V_j(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{3.1}$$

Kryterium to wskaże jednoznacznie na strategię a_2, najlepszą w jego sensie, z maksymalną wypłatą równą 8, przy założeniu, że pozostali gracze wybiorą strategie wchodzące w skład strategii n_1 (b_1,c_2).

Jeśli operator A zakładał będzie skrajny pesymizm odnośnie odpowiedzi pozostałych graczy, wówczas kierować się winien kryterium maksymalizacji najmniejszej wypłaty - kryterium Walda, postaci:

$$\max\{\min_j V_j(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{3.2}$$

Kryterium to wskaże jednoznacznie na strategię a_4, najlepszą w jego sensie, zapewniającą operatorowi A wypłatę co najmniej równą 4.

Jeśli z wyniku decyzji, jaką podejmie kierownictwo operatora A, przyjdzie mu się rozliczać przed zarządem, wówczas właściwym (zapewniającym minimum negatywnej oceny otrzymanego wyniku) kryterium wyboru może się okazać kryterium minimalizacji największej straty - kryterium Savage'a, postaci:

$$\min\{\max_j \widetilde{V}_j(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{3.3}$$

gdzie

$$\widetilde{V}_j(a_i) = V_{j\,\max} - V_j(a_i) \tag{3.4}$$

$$V_{j\,\max} = \max_i V_j(a_i). \tag{3.5}$$

Kryterium to wskaże jednoznacznie na strategię a_1 z maksymalną odchyłką od wartości największej (w kolumnie) równej 2.

□

W przytoczonym przykładzie zakładaliśmy, iż stawki za ruch wymieniany między sieciami (ceny na rynku hurtowym) są w rozpatrywanym przedziale czasu ustalone. Model gry przeciwko naturze i procedura wyboru strategii oparta na konkretnym kryterium zachowują swą przydatność również wtedy, gdy tak nie jest. W przypadku, gdy w niedługim czasie po ustaleniu cen na rynku detalicznym planowana jest renegocjacja umów dotyczących cen na rynku hurtowym, dopuszczalne wartości stawek rozliczeniowych traktować można jako strategie dodatkowego, hipotetycznego gracza i włączyć do zbioru dopuszczalnych strategii (stanów) natury. Zilustrujemy to na poniższym przykładzie.

Przykład 3.2

Rozważamy sytuację analogiczną jak w przykładzie 3.1 z tą tylko różnicą, iż niedługo po wygaśnięciu aktualnych umów, zawartych pomiędzy operatorem A a jego najbardziej dochodowymi abonentami wygasa również umowa interconectowa, zawarta przez operatora A z operatorem B. Operator A spodziewa się, iż nowa umowa będzie albo przedłużeniem aktualnych warunków współpracy, albo odzwierciedli stawki rozliczeniowe rekomendowane przez regulatora rynku. W momencie ustalania cen na rynku detalicznym operator A nie wie, który z dwóch wariantów zostanie przyjęty w trakcie negocjacji nowej umowy z operatorem B.

Wprowadzamy zatem hipotetycznego gracza H, którego strategie gry odzwierciedlają możliwe warianty umowy interconectowej, którą zawrą operatorzy A i B. Operator H ma zatem dwie strategie:

h_1 - operatorzy A i B utrzymają aktualne stawki rozliczeniowe,
h_2 - operatorzy A i B przyjmą stawki rekomendowane przez regulatora.

Natura N, reprezentująca operatorów B i C oraz hipotetycznego gracza H, ma teraz szesnaście strategii odzwierciedlających kolejne kombinacje strategii gry graczy A, B i H.

$$
\begin{aligned}
n_1 &= (b_1, c_1, h_1)\\
n_2 &= (b_2, c_1, h_1)\\
n_3 &= (b_3, c_1, h_1)\\
n_4 &= (b_4, c_1, h_1)\\
n_5 &= (b_1, c_2, h_1)\\
n_6 &= (b_2, c_2, h_1)\\
n_7 &= (b_3, c_2, h_1)\\
n_8 &= (b_4, c_2, h_1)\\
n_9 &= (b_1, c_1, h_2)\\
n_{10} &= (b_2, c_1, h_2)\\
n_{11} &= (b_3, c_1, h_2)\\
n_{12} &= (b_4, c_1, h_2)\\
n_{13} &= (b_1, c_2, h_2)\\
n_{14} &= (b_2, c_2, h_2)\\
n_{15} &= (b_3, c_2, h_2)\\
n_{16} &= (b_4, c_2, h_2)
\end{aligned}
$$

W oparciu o model popytu i model kosztów operatora A, dla każdej dopuszczalnej strategii natury - każdej kombinacji cen na rynkach detalicznych operatorów B i C, oraz przewidywanych stawek rozliczeniowych pomiędzy operatorami A i B (strategie hipotetycznego gracza H) - oraz każdej strategii operatora A, można teraz obliczyć wartość osiąganego zysku (wyznaczyć macierz wypłat gracza A w grze przeciwko naturze N, reprezentującej graczy B, C i H). □

3.3 Regularyzacja rozwiązań niejednoznacznych

W wyniku zastosowania pojedynczego kryterium wyboru strategii otrzymać można wiele nierozróżnialnych w sensie tegoż kryterium strategii. Dla przykładu, jeśli macierz wypłat gracza A przedstawia się jak w tabeli 3.3, a gracz ten będzie się kierował w swych decyzjach kryterium maksymalizacji wartości oczekiwanej - kryterium Laplace'a, postaci:

$$\max\{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} V_j(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{3.6}$$

wówczas gracz ten otrzyma dwie, nierozróżnialne w sensie tego kryterium strategie - a_1 i a_2 z wartościami oczekiwanymi, równymi dla obu $\frac{7}{3}$. Aby jednoznacznie wyłonić jedną strategię spośród nich, gracz A użyć może innego kryterium. Proces ten nazywa się *regularyzacją*. Jeśli do zbioru strategii najlepszych w sensie wcześniej użytego kryterium Laplace'a (a_1 i a_2) gracz A

Tabela 3.3: Regularyzacja - macierz wypłat: Usunięcie niejednoznaczności rozwiązań otrzymanych w wyniku stosowania kryterium Laplace'a przez kryteria Walda i Optymistyczne.

	b_1	b_2	b_3
a_1	3	2	2
a_2	1	4	2
a_3	0	4	2

zastosuje kryterium Optymistyczne (3.1), wówczas w wyniku jego użycia otrzyma strategię a_2. Jeśli zaś zastosuje kryterium Walda (3.2), wówczas otrzyma strategię a_1.

W procesie regularyzacji należy zachować ostrożność, bowiem nie wszystkie kombinacje kryteriów są użyteczne. Dla przykładu, zastosowanie regularyzacji odwrotnych do wyżej wymienionych, czyli próba wyłonienia jednoznacznego rozwiązania poprzez zastosowanie kryterium Laplace'a, do zbioru strategii otrzymanych w wyniku zastosowania kryterium Optymistycznego lub Walda w ich postaci ogólnej (patrz zależności (A.3) i (A.5) w Dodatku A) nie miałoby sensu, bowiem strategie nierozróżnialne w sensie kryterium Optymistycznego lub Walda ogólnej postaci, są również nierozróżnialne w sensie kryterium Laplace'a. Więcej na ten temat znaleźć można w Dodatku B.

Niejednoznaczność rozwiązania otrzymanego w wyniku zastosowania określonego kryterium wyboru strategii nie jest czymś, czego za wszelką cenę należy się pozbyć, wyłaniając jedno bezapelacyjnie najlepsze rozwiązanie problemu decyzyjnego. Wręcz przeciwnie. Niejednoznaczność rozwiązania oznacza jedynie tę samą wartość kryterium wyboru strategii, czyli pewnej zaagregowanej[3] postaci funkcji wypłaty w jednokryterialnej grze. Wartościom tym odpowiadają jednakże różne strategie gry, czyli różne poziomy cen za poszczególne jednostki usługowe. Ta różnorodność jest pożądana w trakcie negocjacji cen na rynku hurtowym. Zakładając, iż negocjacje cen na rynku hurtowym poprzedzają proces ustalania cen na rynku detalicznym, fakt posiadania wielu równoważnych (w sensie określonego kryterium wyboru strategii) rozwiązań problemu wpływa korzystnie na proces dochodzenia do porozumienia [51, 176]. Im więcej równoważnych strategii posiada dany gracz, tym szerszy wachlarz kombinacji cen na rynku hurtowym zaproponować może partnerowi w negocjacjach, a co się z tym wiąże, tym większe jest prawdopodobieństwo, że wskaże w ten sposób na rozwiązanie zadowalające obie strony.

Niejednoznaczność rozwiązania jest pożądana również wtedy, gdy gracz kieruje się nie jed-

[3] Jest to agregacja niepewności związanej z możliwymi strategiami gry graczy reprezentowanych przez naturę.

nym, a wieloma kryteriami oceny wybranych strategii[4], czyli gdy *gra* w kilka gier jednocześnie. Strategie równoważne w jednej grze w innej grze równoważne już być nie muszą. Arbitralne usuwanie niejednoznaczności z punktu widzenia tylko jednej gry (jednego kryterium oceny wybranej strategii) może się okazać posunięciem chybionym z punktu widzenia innej gry.

3.4 Metoda Punktu Odniesienia

Niepewność odnośnie decyzji konkurencyjnych graczy, lub inaczej mówiąc wielość stanów natury, które reprezentują dopuszczalne decyzje konkurencyjnych graczy, wprowadza do naszej analizy moment wielokryterialny. Każdy ze stanów natury traktować można jako niezależne kryterium oceny wybranej przez danego gracza strategii[5] - z_j. Kryteria wyboru strategii (np. Walda, Laplace'a itd - oznaczmy - X), o których szerzej mowa w Dodatku A stanowią przykłady funkcji agregującej te kryteria w jedno syntetyczne kryterium. Kolejny moment wielokryterialny wprowadza regularyzacja rozwiązań niejednoznacznych. Jest to przykład leksykograficznej optymalizacji, w której za kolejno optymalizowane kryteria z_j przyjmuje się wcześniej wybrane kryteria wyboru strategii[6] - $X(a_i)$. W tym punkcie przedstawimy podejście oparte na Metodzie Punktu Odniesienia [59, 93, 131, 181, 182, 183].

3.4.1 Ogólne zasady Metody Punktu Odniesienia

W Metodzie Punktu Odniesienia przyjmuje się, iż decydent wyraża swoje preferencje poprzez określanie dla każdego z optymalizowanych kryteriów z_j takiej wartości, która by go w pełni usatysfakcjonowała. Wartość ta nazywana jest *poziomem aspiracji* dla tego kryterium - $\overline{z}_j$. Zbiór takich wartości tworzy w przestrzeni kryteriów wektor $\overline{\mathbf{z}}$ nazywany *punktem aspiracji*. Dla tak dobranego punktu aspiracji poszukiwane jest takie niezdominowane rozwiązanie, dla którego wartość poszczególnych kryteriów oceny - z_j jest najbliższa względem tego punktu.

[4] Przypominamy tu subtelne rozróżnienie pomiędzy *kryteriami oceny strategii*, z których każde definiuje jednokryterialną grę rynkową (np. grę o zysk, grę o wielkość ruchu itp.), a *kryteriami wyboru strategii*, służącymi do wskazania najlepszej w określonym sensie strategii gry w jednokryterialnej grze przeciwko naturze (np. kryterium Walda, Laplace'a, LNW itp.).

[5] Podkreślmy wyraźnie, iż dzieje się tak mimo rozpatrywania jednokryterialnych (w sensie definicji podanej w rozdziale 2) gier rynkowych.

[6] W innym, równie słusznym rozumieniu, regularyzację traktować można jako tworzenie nowego kryterium wyboru strategii X^*, np. postaci ważonej sumy K kryteriów $X_k(a_i)$, wybranych do regularyzacji

$$X^*(a_i) = \sum_{k=1}^{K} w_k X_k(a_i)$$

przy czym pomiędzy poszczególnymi wagami w_k zachodzi zależność $w_1 \gg w_2 \gg \ldots w_k \ldots \gg w_K$, gdzie w_k odpowiada wadze przypisanej kryterium rozpatrywanemu w k-tej iteracji procesu regularyzacji.

Wybór takiego rozwiązania dokonywany jest poprzez maksymalizację pewnej funkcji skalaryzującej $s(\mathbf{z}, \overline{\mathbf{z}})$, agregującej wszystkie kryteria w jedno kryterium syntetyczne. Funkcja ta, nazywana także *funkcją osiągnięcia zgodną z porządkiem* (*order-consistent achivement function*), powinna posiadać pewne szczególne własności[7] tak, aby otrzymane rozwiązanie $\mathbf{z}$ posiadało następujące właściwości:

- jeżeli wybrany przez decydenta punkt aspiracji leży poza zbiorem osiągalnych wartości kryteriów, to otrzymane rozwiązanie $\hat{z}$ należy do zbioru rozwiązań Pareto-optymalnych i jest najbliższe z możliwych rozwiązań względem punktu aspiracji;
- jeżeli punkt aspiracji leży wewnątrz zbioru osiągalnych wartości kryteriów, wówczas otrzymane rozwiązanie $\hat{z}$ jest lepsze od punktu aspiracji i należy do zbioru rozwiązań Pareto-optymalnych;
- jeżeli punkt aspiracji znajduje się w zbiorze rozwiązań Pareto-optymalnych, to otrzymane rozwiązanie $\hat{z}$ równe jest punktowi aspiracji.

Dla przypadku maksymalizacji wszystkich kryteriów, przykładowa funkcja skalaryzująca spełniająca wymienione wymagania przedstawiona jest poniżej.

$$s(\mathbf{z}, \overline{\mathbf{z}}) = \min_{0 \leqslant j \leqslant n} \left(\frac{z_j - \overline{z}_j}{u_j - \overline{z}_j} \right) + \rho \sum_{j=0}^{n} \frac{z_j - \overline{z}_j}{u_j - \overline{z}_j} \tag{3.7}$$

Wektor $\mathbf{u} = (u_1, \ldots u_j, \ldots, u_n)$ jest tak zwanym *punktem utopijnym*. Składowe tego wektora przyjmują maksymalne wartości, jakie mogłyby przyjąć poszczególne kryteria, gdyby maksymalizowano je niezależnie od pozostałych, natomiast ρ jest parametrem przyjmującym małe wartości większe od zera[8].

Metoda punktu odniesienia doczekała się licznych modyfikacji. Jedna z nich, oprócz pojęcia punktu aspiracji, wprowadza dodatkowo pojęcie *punktu rezerwacji* $\underline{\mathbf{z}}$, które przyjęło się interpretować jako najgorsze rozwiązanie, które decydent jest jeszcze w stanie zaakceptować.

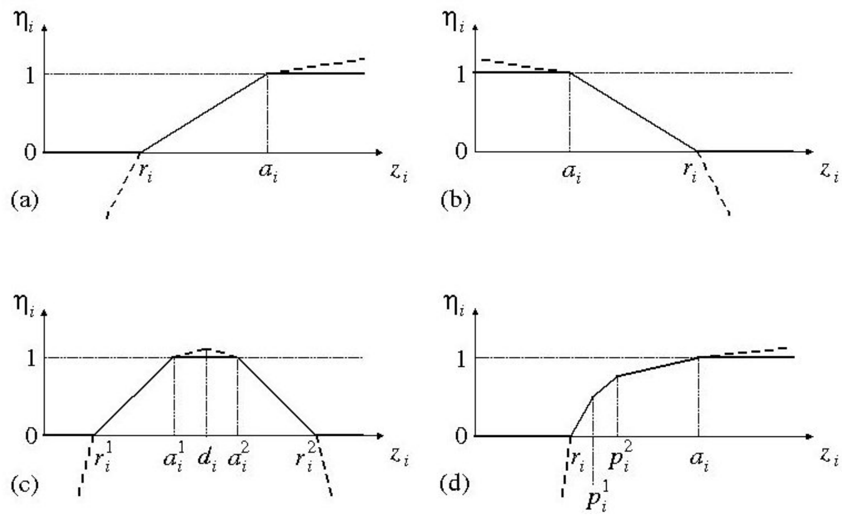
Dodatkowo, w celu standaryzacji miar poszczególnych kryteriów, dla każdego kryterium z_j wprowadza się jeszcze tzw. *cząstkowe funkcje osiągnięcia* - η_j, które transformują zbiór wartości kryteriów z_j w zbiór poziomów satysfakcji, przy czym wyróżniono trzy typy cząstkowych

[7] Po pierwsze, funkcja skalaryzująca powinna być właściwie monotoniczna względem każdego z kryteriów z_j w sensie dodatniego stożka D (patrz ciąg dalszy przypisu). Po drugie, w przypadku, gdy punkt aspiracji należałby do zbioru rozwiązań niezdominowanych, wówczas funkcja skalaryzująca powinna nieliniowo separować ów zbiór od dodatniego stożka D, przesuniętego do tego punktu. Przy czym pod pojęciem dodatniego stożka D rozumie się zbiór punktów w przestrzeni kryteriów, które dla każdego z kryteriów przyjmują wartości nie mniejsze od zera. Powyższe dwie własności, nałożone na funkcję skalaryzującą rozważa się również w stosunku do dodatniego stożka rozwartego D_ϵ, zdefiniowanego jako zbiór punktów $\mathbf{z}$ w przestrzeni kryteriów, dla których $\mathrm{dist}(\mathbf{z}, D) < \epsilon ||\mathbf{z}||$.

[8] Np. $\rho = \frac{\epsilon}{N}$ (patrz przypis 7).

funkcji osiągnięcia w zależności od tego, czy odpowiadające im kryteria są maksymalizowane, minimalizowane, czy stabilizowane. Rysunki 3.1(a), 3.1(b) i 3.1(c) ilustrują kształt cząstkowych funkcji osiągnięcia dla tych trzech typów kryteriów. W każdym z przypadków, funkcja osiągnię-

Rysunek 3.1: Cząstkowe funkcje osiągnięcia dla kryterium maksymalizowanego (a), minimalizowanego (b) i stabilizowanego (c). Rysunek (d) przedstawia kształt funkcji osiągnięcia dla kryterium maksymalizowanego z dodanymi punktami pośrednimi.



cia η_i zwraca tym większe wartości, im wartość kryterium w ocenie decydenta jest lepsza. W punkcie, w którym wartość kryterium z_j zrównuje się z punktem aspiracji $\overline{z}_j$, funkcja osiągnięcie η_i przyjmuje wartość równą 1. W punkcie, w którym wartość kryterium z_j zrównuje się z punktem rezerwacji $\underline{z}_j$, funkcja osiągnięcia η_j przyjmuje wartość równą 0. Decydent specyfikuje swoje preferencje kształtując funkcję osiągnięcia, poprzez podawanie wartości punktu aspiracji $\overline{z}_j$ i rezerwacji $\underline{z}_j$, a w szczególnych przypadkach jeszcze dodatkowych punktów pośrednich (patrz rysunek 3.1(d)).

Poniżej przedstawiono przykładowe postaci funkcji osiągnięcia dla kryteriów maksymalizowanych, minimalizowanych i stabilizowanych.

$$\eta_j^{\max}(z_j) = \begin{cases} \frac{\beta(z_j - \underline{z}_j)}{\overline{z}_j - \underline{z}_j} & dla \quad z_j < \underline{z}_j \\ \frac{z_j - \underline{z}_j}{\overline{z}_j - \underline{z}_j} & dla \quad \underline{z}_j \leqslant z_j \leqslant \overline{z}_j \\ 1 + \frac{\alpha(z_j - \overline{z}_j)}{\overline{z}_j - \underline{z}_j} & dla \quad \overline{z}_j < z_j \end{cases}$$

$$\eta_i^{\min}(z_j) = \begin{cases} 1 + \frac{\alpha(z_j - \overline{z}_j)}{\overline{z}_j - \underline{z}_j} & dla \quad z_j < \overline{z}_j \\ \frac{z_j - \underline{z}_j}{\overline{z}_j - \underline{z}_j} & dla \quad \overline{z}_j \leqslant z_j \leqslant \underline{z}_j \\ \frac{\beta(z_j - \underline{z}_j)}{\overline{z}_j - \underline{z}_j} & dla \quad \underline{z}_j < z_j \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\eta_j^{\text{stab}}(z_j) = \begin{cases} \frac{\beta(z_j - \underline{z}_j^1)}{\overline{z}_j^1 - \underline{z}_j^1} & dla \quad z_j < \underline{z}_j^1 \\ \frac{z_j - \underline{z}_j^1}{\overline{z}_j^1 - \underline{z}_j^1} & dla \quad \underline{z}_j^1 \leqslant z_j < \overline{z}_j^1 \\ 1 + \frac{\alpha(z_j - \overline{z}_j^1)}{\overline{z}_j^1 - \underline{z}_j^1} & dla \quad \overline{z}_j^1 \leqslant z_j < d_j \\ 1 + \frac{\alpha(z_j - \overline{z}_j^2)}{\overline{z}_j^2 - \underline{z}_j^2} & dla \quad d_j \leqslant z_j < \overline{z}_j^2 \\ \frac{z_j - \underline{z}_j^2}{\overline{z}_j^2 - \underline{z}_j^2} & dla \quad \overline{z}_j^2 \leqslant z_j < \underline{z}_j^2 \\ \frac{\beta(z_j - \underline{z}_j^2)}{\overline{z}_j^2 - \underline{z}_j^2} & dla \quad \underline{z}_j^2 \leqslant z_j \end{cases}$$

Przyjmuje się tu założenie, iż $0 < \alpha < 1$ oraz $\beta > 1$.

Funkcja skalaryzująca, wykorzystująca wprowadzone funkcje osiągnięcia przybiera poniższą postać:

$$s(\mathbf{z}, \eta) = \min_{0<j\leqslant n} \eta_j(z_j) + \rho \sum_{j=0}^{n} \eta_j(z_j) \tag{3.9}$$

3.4.2 Zastosowanie Metody Punktu Odniesienia w jednokryterialnej grze przeciwko naturze

Przyjmiemy, iż optymalizowanymi kryteriami z_j będą przedstawione w Dodatku A kryteria wyboru strategii w grach przeciwko naturze X_k w swojej szczególnej postaci[9]. Kryteria te dzielą się na kryteria maksymalizowane (maksymalizujące jakąś zaagregowaną postać funkcji wypłat) i kryteria minimalizowane (minimalizujące jakąś zaagregowaną postać funkcji strat). Przyjmiemy funkcję skalaryzującą postaci (3.9) z cząstkowymi funkcjami osiągnięcia postaci (3.8). Do konstrukcji optymalizowanych kryteriów z_j w oparciu o poszczególne kryteria wyboru strategii X_k wykorzystamy jedynie zawartą w tych kryteriach funkcję agregującą wartości wypłat (strat), z pominięciem operatora maksymalizacji (minimalizacji), stanowiącego narzędzie wyboru takiej strategii, dla której wartość tej funkcji jest największa (najmniejsza). Poniżej przedstawiono postaci optymalizowanych kryteriów z_j dla wyróżnionych w Dodatku A kryteriów wyboru strate-

[9] Kryteria X_k w postaci ogólnej w większości przypadków sformułowane zostały w postaci leksykograficznej optymalizacji, w wyniku której otrzymuje się ciąg kolejnych wartości optymalizowanych funkcji celu (wyników kolejnych faz optymalizacji), a nie jedną wartość. Dlatego też postać ta nie nadaje się do stworzenia optymalizowanego kryterium z_j. Aby wykorzystać postać ogólną kryteriów X_k należałoby dokonać dodatkowej agregacji wartości otrzymanych z kolejnych faz leksykograficznej optymalizacji.

gii w grach przeciwko naturze[10]. Dla uproszczenia, w przypadku kryteriów podanych w wariancie ze względnym i bezwzględnym progiem uznania, podajemy tylko jedną wersję z progiem względnym.

1. Kryteria maksymalizowane

   - kryterium Walda
   $$z_j(a_i) = \min_l V_l(a_i) \tag{3.10}$$
   - kryterium Optymistyczne
   $$z_j(a_i) = \max_l V_l(a_i) \tag{3.11}$$
   - kryterium Laplace'a
   $$z_j(a_i) = \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} V_l(a_i) \tag{3.12}$$
   - kryterium Hurwicza
   $$z_j(a_i) = \alpha \cdot \max_l V_l(a_i) + (1-\alpha) \cdot \min_l V_l(a_i) \tag{3.13}$$
   - kryterium LNW postaci maksymalizacji liczby największych wygranych
   $$z_j(a_i) = \sum_l \Phi(\widetilde{V}_l(a_i)) \tag{3.14}$$
   gdzie
   $$\widetilde{V}_l(a_i) = V_{l\max} - V_l(a_i) \tag{3.15}$$
   $$V_{l\max} = \max_i V_l(a_i) \tag{3.16}$$
   $$\Phi(x) = \frac{sign(-x)+1}{2} \tag{3.17}$$
   - kryterium LNWP
   $$z_j(a_i) = \sum_l \cdot\Phi(\widetilde{V}_l(a_i), \rho, V_{l\max}) \tag{3.18}$$
   gdzie ρ jest wartością względnego progu uznania, $\widetilde{V}_l(a_i)$ wyrażone jest zależnością: (3.15), $V_{l\max}$ zaś zależnością (3.16), natomiast Φ wyraża się zależnością
   $$\Phi(x, \rho, x_{\max}) = \frac{sign(\rho - \frac{x}{x_{\max}})+1}{2} \tag{3.19}$$

[10] W zestawieniu pominięto kryterium WES (należące do grupy kryteriów minimalizowanych) z racji na fakt, iż kryterium to jest praktycznie użyteczne jedynie w swej ogólnej postaci (postać szczególna jest tożsama z kryterium Savage'a). Dlatego też kryterium to nie będzie używane jako optymalizowane kryterium z_j w metodzie punktu odniesienia (patrz przypis 9).

- kryterium SNWP

$$z_j(a_i) = \sum_l V_l(a_i) \cdot \Phi(\widetilde{V}_l(a_i), \rho, V_{l\,\max}) \tag{3.20}$$

gdzie ρ jest wartością względnego progu uznania, $\widetilde{V}_l(a_i)$ wyrażone jest zależnością (3.15), $V_{l\,\max}$ zaś zależnością (3.16), natomiast Φ zależnością (3.19).

- kryterium EWP

$$z_j(a_i) = \sum_l V_l(a_i) \cdot \Psi(V_l(a_i), v) \tag{3.21}$$

gdzie v jest wartością bezwzględnego progu uznania, zaś Ψ zdefiniowane jest zależnością

$$\Psi(x, v) = \frac{sign(x - v) + 1}{2}. \tag{3.22}$$

- kryterium PEW

$$z_j(a_i) = \sum_k \sum_l V_l(a_i) \cdot \Psi(V_l(a_i), k \cdot v) \tag{3.23}$$

gdzie v jest wartością względnego progu uznania, zaś Ψ zależnością (3.22).

2. Kryteria minimalizowane

- kryterium Savage'a

$$z_j(a_i) = \max_l \widetilde{V}_l(a_i) \tag{3.24}$$

gdzie $\widetilde{V}_l(a_i)$ wyrażone jest zależnością (3.15).

- kryterium ESP

$$z_j(a_i) = \sum_l \widetilde{V}_l(a_i) \cdot \Psi(\widetilde{V}_l(a_i), v) \tag{3.25}$$

gdzie $\widetilde{V}_l(a_i)$ wyrażone jest zależnością (3.15), zaś Ψ zależnością (3.22).

- kryterium PES

$$z_j(a_i) = \sum_k \sum_l \widetilde{V}_l(a_i) \cdot \Psi(\widetilde{V}_l(a_i), k \cdot v) \tag{3.26}$$

gdzie v jest wartością bezwzględnego progu uznania, $\widetilde{V}_l(a_i)$ wyrażone jest zależnością (3.15), zaś Ψ zależnością (3.22).

Zastosowanie Metody Punktu Odniesienia w procesie wyboru strategii w jednokryterialnej grze rynkowej, modelowanej w formie gry przeciwko naturze zilustrujemy na poniższym przykładzie.

Przykład 3.3

Rozpatrzmy sytuację decyzyjną jak w przykładzie 3.1. Macierz wypłat operatora A zilustrowana jest w tabeli 3.4, a odpowiadająca jej macierz strat w tabeli 3.5. Przyjmijmy, iż operator A

Tabela 3.4: Macierz wypłat operatora A w grze o zysk na rynku telefonicznych usług lokalnych.

	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8
a_1	6	5	4	7	5	4	3	6
a_2	8	4	3	5	7	3	2	4
a_3	7	6	3	6	6	4	2	5
a_4	5	6	6	7	4	5	5	6

Tabela 3.5: Macierz strat operatora A w grze o zysk na rynku telefonicznych usług lokalnych.

	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8
a_1	2	1	2	0	2	1	2	0
a_2	0	2	3	2	0	2	3	2
a_3	1	0	3	1	1	1	3	1
a_4	3	0	0	0	3	0	0	0

ocenia swoje decyzje z punktu widzenia trzech kryteriów:

1. Kryterium Walda

$$z_1 = \min_j V_j(a_i) \tag{3.27}$$

2. Kryterium Optymistyczne

$$z_2 = \max_j V_j(a_i) \tag{3.28}$$

3. Kryterium Savage'a

$$z_3 = \max_j \widetilde{V}_j(a_i) \tag{3.29}$$

Zgodnie z ich istotą, kryteria z_1 i z_2 należą do grupy kryteriów maksymalizowanych, zaś kryterium z_3 należy do grupy kryteriów minimalizowanych. W tabeli 3.6 zilustrowano wartości poszczególnych kryteriów z_j dla każdej z czterech strategii operatora A. Przyjmiemy następujące wartości parametrów cząstkowych funkcji osiągnięcia $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$. Dla uproszczenia założymy, iż reprezentujący operatora A decydent steruje wyłącznie punktem aspiracji $\bar{\mathbf{z}}$, zaś wartość punktu rezerwacji $\underline{\mathbf{z}}$ ustalona jest na najgorszych dopuszczalnych wartościach danego kryterium. Dla kryteriów maksymalizowanych z_1 i z_2 otrzymamy zatem:

Tabela 3.6: Wartości poszczególnych kryteriów z_j dla każdej strategii operatora A.

	z_1	z_2	z_3
a_1	3	7	2
a_2	2	8	3
a_3	2	7	3
a_4	4	7	3

$$\underline{z}_1 = \min_i z_1(a_i) = 2,$$

$$\underline{z}_2 = \min_i z_2(a_i) = 7$$

Dla minimalizowanego kryterium z_3 otrzymamy:

$$\underline{z}_3 = \max_i z_3(a_i) = 3$$

Wartości cząstkowych funkcji osiągnięcia η_j dla różnych wartości poziomów aspiracji $\bar{z}_j$ wyznaczymy z zależności (3.8). Tabele 3.7, 3.8 i 3.9 ilustrują wartości funkcji osiągnięcia liczone dla każdej ze strategii operatora A dla trzech przykładowo wybranych wartości poziomów aspiracji $\bar{z}_j$ i założonych poziomach rezerwacji $\underline{z}_1 = 2$, $\underline{z}_2 = 7$ i $\underline{z}_3 = 3$.

Punkt aspiracji jest wektorem składającym się z poszczególnych poziomów aspiracji $\bar{\mathbf{z}} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$ i wyraża preferencje operatora odnośnie satysfakcjonujących wartości poszczególnych kryteriów. Punkt rezerwacji jest wektorem składającym się z poszczególnych poziomów rezerwacji $\underline{\mathbf{z}} = (\underline{z}_1, \underline{z}_2, \underline{z}_3)$ i wyraża preferencje operatora odnośnie akceptowalnych wartości poszczególnych kryteriów. Maksymalizacja skalaryzującej funkcji osiągnięcia $s(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{z}})$ postaci (3.9), umożliwia wyłonienie strategii a_i operatora A, która jest najbliższa spełnieniu tych wymagań, bądź spełnia je w stopniu najlepszym.

W tabeli 3.10 zilustrowano wartości funkcji skalaryzującej dla przykładowych wartości punktów aspiracji $\bar{\mathbf{z}}$ i rezerwacji $\underline{\mathbf{z}}$, dla każdej z rozważanych przez operatora A strategii. W pier-

Tabela 3.7: Wartości cząstkowej funkcji osiągnięcia η_1 dla trzech wartości poziomu aspiracji kryterium $\overline{z}_1$ (Walda), dla poszczególnych strategii operatora A.

	$\overline{z}_1 = 3$	$\overline{z}_1 = 4$	$\overline{z}_1 = 5$
a_1	1	0.5	0.333
a_2	0	0	0
a_3	0	0	0
a_4	2	1	0.667

Tabela 3.8: Wartości cząstkowej funkcji osiągnięcia η_2 dla trzech wartości poziomu aspiracji kryterium $\overline{z}_2$ (Optymistycznego), dla poszczególnych strategii operatora A.

	$\overline{z}_2 = 7.5$	$\overline{z}_2 = 8$	$\overline{z}_2 = 8.5$
a_1	0	0	0
a_2	2	1	0.667
a_3	0	0	0
a_4	0	0	0

Tabela 3.9: Wartości cząstkowej funkcji osiągnięcia η_3 dla trzech wartości poziomu aspiracji kryterium $\overline{z}_3$ (Savage'a), dla poszczególnych strategii operatora A.

	$\overline{z}_3 = 5$	$\overline{z}_3 = 5.5$	$\overline{z}_3 = 6$
a_1	2	1	0.667
a_2	0	0	0
a_3	0	0	0
a_4	0	0	0

Tabela 3.10: Wartości skalaryzującej funkcji osiągnięcia $s(\mathbf{z}, \overline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{z}})$*dla czterech wybranych punktów odniesienia.*

	$\overline{\mathbf{z}} = (3, 7.5, 2)$ $\underline{\mathbf{z}} = (2, 7, 3)$	$\overline{\mathbf{z}} = (4, 7.5, 2)$ $\underline{\mathbf{z}} = (2, 7, 3)$	$\overline{\mathbf{z}} = (3, 7.5, 2.5)$ $\underline{\mathbf{z}} = (2, 7, 3)$	$\overline{\mathbf{z}} = (4, 8.5, 2.5)$ $\underline{\mathbf{z}} = (2, 7, 5)$
a_1	**0.2**	0.15	**0.3**	0.17
a_2	**0.2**	**0.2**	0.2	0.15
a_3	0	0	0	0
a_4	**0.2**	0.1	0.2	**0.18**

wszej kolumnie przedstawiono wartości funkcji skalaryzującej dla punktu aspiracji $\overline{\mathbf{z}} = (3, 7.5, 2)$. Punkt rezerwacji zgodnie z początkowym założeniem ustawiono na najgorsze dopuszczalne wartości poszczególnych kryteriów $\underline{\mathbf{z}} = (2, 7, 3)$. Dla tak dobranych punktów aspiracji i rezerwacji strategie a_1, a_2 i a_4 są najlepszymi i wzajemnie nierozróżnialnymi decyzjami operatora A (wartość funkcji skalaryzującej wynosi dla nich 0.2 i jest największą wartością w kolumnie). Jeśli operator zwiększy poziom aspiracji dla kryterium Walda do wartości $z_1 = 4$ (kolumna druga w tabeli 3.10), wówczas jednoznacznie wyłoniona zostanie strategia a_2 z wartością funkcji skalaryzującej równą 0.2. Jeśli zaś operator A zwiększy (względem punktu początkowego) wartość poziomu aspiracji dla kryterium Savage'a do wartości $z_3 = 2.5$, wówczas jednoznacznie zostanie wyłoniona strategia a_1, dla której wartość funkcji skalaryzującej wynosi 0.3 (kolumna trzecia w tabeli 3.10). Strategię a_4 operator uzyskać może zmieniając jednocześnie punkt aspiracji i rezerwacji (kolumna czwarta w tabeli 3.10). □

3.5 Koncepcja Operatora Najbardziej Obiecującego

Traktowanie konkurencyjnych graczy jako naturę, o której nic ponad znajomość jej dopuszczalnych strategii się nie wie, jest podejściem niewątpliwie „tanim", ale obarczonym dużym ryzykiem błędu[11]. Ryzyko to jest mniejsze w przypadku znajomości macierzy wypłat graczy konkurencyjnych[12]. Teraz zastosujemy nieco inne podejście do problemu minimalizacji ryzyka błędu.

[11] Skutki takich błędów wykazać mogą dopiero, jak w rzeczywistości „drogim" może być takie podejście.

[12] Ściśle rzecz ujmując jest rzeczą niemożliwą, aby w przypadku nieposiadania informacji o macierzy wypłat konkurencyjnych graczy ocenić trafność podjętej decyzji, i to nawet po fakcie poznania odpowiedzi graczy konkurencyjnych na własne decyzje. Wynika to z tej racji, iż nie znając macierzy wypłat konkurentów dany gracz nie jest w stanie odpowiedzieć na pytanie, co by było, gdyby wybrał inną strategię. Gracz nie wie, jaka wówczas byłaby odpowiedź konkurentów, a więc nie posiada punktu odniesienia dla aktualnego rozwiązania gry.

Podejście to opiera się na minimalizacji liczby dopuszczalnych strategii natury, poprzez ustalenie decyzji jednego lub większej liczby graczy. Znajomość decyzji choćby jednego z konkurentów zmniejsza liczbę dopuszczalnych strategii natury w sposób radykalny. Dla przykładu, jeśli natura, reprezentująca zbiór wszystkich konkurentów gracza A posiadała $||\mathcal{I}_N||$ dopuszczalnych strategii gry, to poznanie przez A decyzji konkurenta B zmniejsza liczbę dopuszczalnych strategii natury do wartości $\frac{||\mathcal{I}_N||}{||\mathcal{I}_B||}$, gdzie $||\mathcal{I}_B||$ jest liczbą dopuszczalnych strategii gracza B. W ten sposób wyłania nam się pierwsze kryterium, na podstawie którego wskazać możemy tego z graczy konkurencyjnych, którego decyzję warto poznać w pierwszej kolejności. Kryterium tym jest liczba dopuszczalnych strategii. Im więcej dany gracz posiada strategii dopuszczalnych, tym informacja o jego decyzji silniej minimalizuje prawdopodobieństwo błędnej decyzji.

Drugie kryterium, na podstawie którego wskazywali będziemy konkurencyjnego gracza, znajomość decyzji którego jest dla danego gracza najbardziej korzystna, bazuje na koncepcji Operatora Najbardziej Obiecującego [107], której poświęcony jest niniejszy punkt pracy.

3.5.1 Sformułowanie problemu

Załóżmy, iż mamy do czynienia z trzema operatorami A, B i C, z których każdy ma do dyspozycji dwie strategie. Rozpatrujemy problem z punktu widzenia operatora A. Operator ten zna macierz swoich wypłat (tabela 3.11), lecz nie zna macierzy wypłat pozostałych operatorów. Operator A

Tabela 3.11: Macierz wypłat operatora A. Sytuacja trzech operatorów A, B i C.

c_1

	b_1	b_2
a_1	3	2
a_2	2	3

c_2

	b_1	b_2
a_1	4	2
a_2	1	3

traktuje zatem pozostałych graczy jako naturę.

Załóżmy, że operator A podejmuje swoją decyzję odnośnie wyboru strategii w oparciu o kryterium Walda (3.2). Kryterium to wskaże, jako najlepszą w jego sensie strategię a_1, zapewniającą operatorowi A wypłatę równą co najmniej 2. Zastanówmy się co by było, gdyby operator A znał decyzję odnośnie wyboru strategii jednego z operatorów B lub C i spróbujmy odpowiedzieć na pytanie, o ile poprawiłoby to wypłatę tegoż operatora wyliczoną w oparciu o to samo kryterium

Ten moment nakreśla wyraźną różnicę między typową grą przeciwko naturze, w której natura postępuje w sposób niezależny od decyzji gracza, a naszym przypadkiem, gdzie decyzja natury jest racjonalną odpowiedzią na tę decyzję.

wyboru. Rozważmy zatem oba przypadki.

Znana jest decyzja operatora B

Jeśli operator B wybierze swoją strategię b_1, to minimalna wypłata, jaką zagwarantować sobie może operator A wynosi 3 (strategie a_1-b_1-c_1). Jeśli B wybierze strategię b_2, to minimalna wypłata, jaką zagwarantować sobie może operator A wynosi również 3 (strategie a_2-b_2-c_1, lub a_2-b_2-c_2). Tak więc w najgorszym przypadku (na tym opiera się kryterium Walda), poznanie decyzji operatora B zapewni operatorowi A przyrost wypłaty wyliczonej w oparciu o kryterium Walda o 1 ($3 - 2 = 1$).

Znana jest decyzja operatora C.

Jeśli operator C wybierze swoją strategię c_1, to minimalna wypłata, jaką zagwarantować sobie może operator A wynosi 2 (strategie a_1-b_2-c_1, lub a_2-b_1-c_1). Jeśli C wybierze strategię c_2, to minimalna wypłata, jaką zagwarantować sobie może operator A wynosi również 2 (strategie a_1-b_2-c_2). Tak więc w sensie kryterium Walda, poznanie decyzji operatora C nie zapewni operatorowi A wzrostu wartości wypłaty ($2 - 2 = 0$).

Stąd wniosek, iż poznanie decyzji operatora B jest w sensie kryterium Walda korzystniejsze dla operatora A aniżeli poznanie decyzji operatora C[13]. Powiemy zatem, iż informacja o decyzji, jaką zamierza podjąć operator B jest - w sensie kryterium Walda - *informacją krytyczną* dla operatora A, a operatora B nazwiemy *Operatorem Najbardziej Obiecującym* dla operatora A [107].

3.5.2 Definiacja ogólna

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

SQ_A^X	-	(*Status Quo*) aktualnie wyliczona wypłata dla operatora A w oparciu o kryterium wyboru strategii X.
KD_{AO}^X	-	(*Known Decision of Operator O*) wypłata operatora A wyliczona w oparciu o kryterium X przy znajomości decyzji operatora O.
VI_{AO}^X	-	(*Value of Information*) wartość informacji dla operatora A odnośnie decyzji operatora O wyliczona w oparciu o kryterium X.

[13] Decyzja operatora C jest wręcz tu w ogóle nieistotna, nie gwarantuje żadnej poprawy minimalnej wypłaty.

Wartość informacji o decyzji operatora O wyznaczymy jako wartość bezwzględną[14] z różnicy między KD_{AO}^X i SQ_A^X:

$$VI_{AO}^X = |KD_{AO}^X - SQ_A^X|. \tag{3.30}$$

Definicja 3.5.1 *Operatororem Najbardziej Obiecującym (Operatorem_NO_A^X) w sensie kryterium X dla operatora A nazywamy operatora, dla którego współczynnik VI_{AO}^X, wyliczony z punktu widzenia operatora A przyjmuje wartość największą.*

$$Operator\_NO_A^X = arg \max_{O \neq A} VI_{AO}^X \tag{3.31}$$

Sposób wyznaczania wartości współczynników SQ_A^X i KD_{AO}^X zależny jest od przyjętego kryterium wyboru strategii X. Szczegółowy opis tego zagadnienia dla wyróżnionych w pracy kryteriów zawarto w Dodatku C. W szczególności Operator Najbardziej Obiecujący względem jednego kryterium, może nie być takim w sensie kryterium innego.

Przy uwzględnianiu wielu kryteriów wyboru strategii - X, do wyznaczenia Operatora Najbardziej Obiecującego zastosować można opisaną wyżej Metodę Punku Odniesienia. W podejściu tym za optymalizowane kryteria oceny z_j podstawić należy funkcję wartości informacji VI_{OA}^X, wyliczonej w oparciu o kryterium X. Sterowanie punktami aspiracji i/lub rezerwacji odpowiadać będzie tu określaniu satysfakcjonującego i/lub akceptowalnego poziomu wartości informacji VI_{OA}^X, wyliczonej w sensie kryterium X dla operatora O. Operatorem Najbardziej Obiecującym będzie wówczas ten, dla którego (przy ustalonych poziomach aspiracji i rezerwacji[15]) otrzyma się największą wartość funkcji skalaryzującej $s(\mathbf{z}, \eta)$ (3.9).

3.5.3 Użyteczność koncepcji

Wartość informacji VI_{AO}^X określa maksymalny poziom kosztu, jaki w sensie kryterium X opłaca się operatorowi A ponieść, aby pozyskać informację[16] odnośnie wybranej przez operatora O

[14] Wartość korzyści VI_{AO}^X liczymy jako wartość bezwzględną z różnicy KD_{AO}^X i SQ_A^X z tego powodu, iż w zależności od tego, czy kryterium X należy do grupy kryteriów maksymalizowanych, czy minimalizowanych, różnica ta będzie większa lub mniejsza od zera. Zachodzą bowiem zależności: $KD_{AO}^X \geqslant SQ_A^X$ dla kryteriów maksymalizowanych (od (3.10) do (3.23)) oraz $KD_{AO}^X \leqslant SQ_A^X$ dla kryteriów minimalizowanych (od (3.24) do (3.26)).

[15] Aby porównywania wartości funkcji skalaryzujących dla poszczególnych operatorów były miarodajne, porównań tych dokonywać należy przy jednakowych wartościach punktów aspiracji i rezerwacji.

[16] Sposób pozyskania tego typu informacji nie jest zagadnieniem trywialnym i to tak zarówno z punktu widzenia technicznego, jak i etycznego czy prawnego. Najprostszą metodą rozwiązania tego problemu jest zwlekanie z podjęciem własnej decyzji, aż do momentu, w którym operator O swoją decyzję podejmie. Szacunkowy koszt odwlekania decyzji stanowi tę miarę, której wartość należy w tym przypadku porównywać z wartością informacji VI_{AO}^X.

strategii gry. Należy jednakże podkreślić, iż jest to poziom, który nie zapewnia, że uzyskana informacja w rzeczywistości pozwoli osiągnąć wynik lepszy od poniesionego kosztu, bowiem wartość ta liczona jest nie w sensie bezwzględnym, ale w sensie określonego kryterium wyboru strategii X. I tak dla przykładu, jeśli wartość informacji liczona jest z punktu widzenia kryterium wartości oczekiwanej (Laplace'a), wówczas VI_{AO}^{Lap} określa średnią (oczekiwaną) wartość informacji dotyczącej znajomości decyzji operatora O. Konkretna decyzja może jednakże mieć dla operatora A wartość tak większą, jak i mniejszą od VI_{AO}^{Lap}.

Wartość informacji VI_{AO}^{X} stanowić może również wskaźnik, określający poziom naturalnej zachęty dla operatora A do wejścia w koalicję[17] z operatorem O. Im silniejszy wpływ na wyniki operatora A mają decyzje operatora O, tym większa zachęta dla A, by te decyzje poznać, a tym bardziej, by mieć na nie wpływ. Wskaźnik ten może być użyteczny również dla regulatora rynku, śledzącego strategiczne posunięcia graczy i odpowiedzialnego za promowanie konkurencyjnej formy rynku. Aby tak być mogło regulator ten jednakże musi znać macierz wypłat operatora A, co w większości przypadków oznacza znajomość jego modelu kosztów. Praktyka pokazuje, iż jest to jednakże wyzwanie niebagatelne [35, 87, 133, 137, 146, 155, 165, 184, 197].

Do koncepcji Operatora Najbardziej Obiecującego odwołamy się również w punkcie 3.9 niniejszego rozdziału, rozważając zagadnienie zmiany kolejności ruchów graczy.

3.6 Wybór strategii gry w sytuacji istnienia rekomendowanych stawek rozliczeniowych na rynku hurtowym

Zgodnie z definicją 2.3.2 strategia a_j gracza A oznacza zbiór jednostek usługowych SU_{Aipm} i związanych z nimi określonych poziomów cen P_{Aipm}^{j}. Jednostki usługowe wchodzić mogą w skład lub zawierać w sobie usługi świadczone zarówno na rynku detalicznym, jak i hurtowym. Ceny na rynku detalicznym ustalane są przez danego operatora i pozostają pod pełną i niemalże wyłączną jego kontrolą[18]. Ceny na rynku hurtowym, poza przypadkami arbitrażowych rozwiązań, są negocjowane, a więc ustalane wspólnie, w kooperacji między przedsiębiorstwami. W komentarzu do przykładu 3.1 sugerowaliśmy, iż stosując metody wspomagania decyzji w grach przeciwko naturze można przyjąć, iż ceny na rynku hurtowym, jeśli są nieznane w momencie ustalania

[17] Koalicja taka przybierać może bardzo różne formy, poczynając od umów nieformalnych, poprzez różne formy integracji poziomej lub pionowej (zależnie od zajmowanych rynków), a wreszcie na fuzji kończąc [15, 119]. Dyskusja na temat prawnej dopuszczalności tego typu koalicji i ich wpływu na poziom konkurencji na rynku wybiega poza zakres niniejszej pracy (na ten temat patrz [78, 138, 139]).

[18] W przypadku słabo rozwiniętej konkurencji na rynku, regulacja prawna obejmuje niejednokrotnie również wysokość cen na rynku detalicznym, ograniczając możliwy zakres ich zmienności, a zatem i swobodę przedsiębiorstw w ich ustalaniu [138].

cen na rynku detalicznym można traktować jako dopuszczalne strategie dodatkowego, hipotetycznego gracza H (przykład 3.2). Rozpatrywanie możliwych wyników negocjacji cen na rynku hurtowym jako strategii hipotetycznego gracza H, które na jednakowych zasadach, co strategie gracza B zostają włączone do strategii natury nie uwzględnia jednakże faktu, iż operatorom przysługuje swoiste *veto* w negocjacjach cen na rynku hurtowym. W przypadku fiaska w negocjacjach operatorzy mogą się spodziewać arbitrażu regulatora. Stawki rozliczeniowe rekomendowane przez regulatora są zwykle wcześniej znane. Możliwą jest również sytuacja, kiedy jeden z operatorów ma obowiązek przedstawiania tzw. oferty ramowej, w której zawarte są propozycje wysokości stawek rozliczeniowych[19]. Stąd operatorzy zawsze mogą założyć, iż w wyniku negocjacji wybrana zostanie strategia odpowiadająca tym stawkom.

Oznaczmy przez h^* strategię hipotetycznego gracza H, która odpowiada stawkom rekomendowanym lub zawartym w ofercie ramowej. Ustalając swoje ceny na rynku detalicznym, operator A zawsze może założyć, iż wynikiem negocjacji będzie wybranie strategii h^*. Wartość wypłaty, jaką A w ten sposób osiągnie, uzależniona będzie dodatkowo od wysokości cen ustalonych na rynku detalicznym gracza B (strategii b_j). Rodzi się w tym miejscu myśl, by określić, które spośród strategii h_l będą dla gracza A nie gorsze niż h^*. Gdyby udało się to ustalić, gracz A miałby możliwość usunięcia z procesu analizy strategii gorszych niż h^*, zmniejszając w ten sposób rozmiar problemu. Niestety, dokonać tego można tylko przy założeniu ustalonej strategii a_i i to tylko w sensie probabilistycznym, przyjmując określoną formę agregacji niepewności związanej ze strategiami b_j gracza B (wyznaczenie wartości strategii h_l w sensie określonego kryterium wyboru strategii X). Przyjmując dla przykładu formę agregacji w postaci wartości oczekiwanej (kryterium Laplace'a), przy ustalonej strategii a_i, dla każdej strategii h_l wyznaczyć można jej wartość jako wartość oczekiwaną z wypłat gracza A po wszystkich strategiach gracza B:

$$V_{Ail}^{Lap} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} V_{jl}^{A}(a_i) : \forall i, l \tag{3.32}$$

gdzie $V_{jl}^{A}(a_i)$ oznacza wartość wypłaty gracza A, gdy wybrał on strategię a_i, gracz B wybrał strategię b_j, a w wyniku negocjacji wybrano strategię h_l, zaś V_{Ail}^{Lap} oznacza wartość strategii h_l, wyznaczoną w oparciu o kryterium Laplace'a, dla strategii a_i. Wartość strategii h^* - $V_{Ai^*}^{Lap}$ wyniesie:

$$V_{Ai^*}^{Lap} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} V_{jl}^{A}(a_i) : \forall i, h_l = h^* \tag{3.33}$$

Dla kryteriów, bazujących na macierzy strat przyjmiemy, iż wartość strategii będzie tym większa, im mniejszą stratę strategia będzie gwarantowała. I tak dla przykładu, w przypadku kryterium

[19] Zagadnienia te poruszane są min. w pracach [38, 42, 45, 46, 48, 49, 50, 94, 138, 136, 135, 173, 174, 186].

Savage'a wartość strategii h_l dla ustalonej strategii a_i wyznaczymy z zależności:

$$V_{Ail}^{Sav} = -\max_j \widetilde{V}_{jl}^{A}(a_i) : \forall i, l \tag{3.34}$$

gdzie $\widetilde{V}_{jl}^{A}(a_i)$ oznacza wartość straty (korzyści utraconej), jaką ponosi gracz A w sytuacji, gdy wybierze strategię a_i, gracz B wybierze strategię b_j, zaś w wyniku negocjacji wybrana zostanie strategia h_l (patrz zależność (A.14)).

Czy rachunki tego typu są bezużyteczne w momencie, gdy jeszcze nie podjęto decyzji odnośnie wyboru strategii a_i? Inaczej mówiąc, czy w procesie wyboru strategii a_i nie można wspomóc gracza A po przez odrzucenie strategii gorszych od h^*, bowiem za gorszą od h^* uznać można daną strategię h_l jedynie w kontekście już ustalonej strategii a_i? Choć faktycznie nie można porównywać strategii h_l (poza przypadkami dominacji) w oderwaniu od strategii a_i, to powyższe zależności okażą się nam przydatne.

Z punktu widzenia gracza A problem sprowadzić można do analizy macierzy, w której wiersze odpowiadały będą jego strategiom a_i, zaś kolumny strategiom h_l, natomiast elementami macierzy będą wartości V_{Ail}^{X} (patrz tabela 3.12). Jedną ze strategii h_l jest tu rekomendowana strategia

Tabela 3.12: Macierz wartości strategii h_l.

	$h_1 = h^*$	h_2	h_3	h_4
a_1			$\vdots$	
a_2	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	V_{A23}^{X}	$\cdots\cdots$
a_3			$\vdots$	
a_4			$\vdots$	

h^*. Z racji na fakt, iż strategia h^* jest dla gracza A tą, która zawsze może zostać wybrana, zaś pozostałe strategie h_l są tak samo możliwe, jak i niemożliwe do osiągnięcia[20], problem można sprowadzić do sytuacji, gdy hipotetyczny gracz H ma wyłącznie dwie strategie: zawsze możliwą do wybrania strategię h^* oraz strategię $\overline{h}$, będącą agregatem w oparciu o kryterium X[21] pozostałych strategii $h_l \neq h^*$, jednakże tylko takich, dla których zachodzi zależność[22]:

$$V_{Ail}^{X} \geqslant V_{Ai^*}^{X} \tag{3.35}$$

[20] Z racji na brak informacji o macierzy wypłat gracza B przyjąć można, iż prawdopodobieństwo zdarzenia, że strategia $h_l \neq h^*$ jest dla gracza B dopuszczalna (nie gorsza dla danego a_i od strategii h^*) równe jest 0.5.

[21] Możliwym tu jest wybór innego kryterium agregującego, względem wcześniej wybieranych. Rodzić to może jednakże problemy interpretacyjne.

[22] Rodzi się w tym miejscu pytanie, czy nie byłoby rozsądniej i prościej rozważać tylko te strategie h_l, dla których $V_{Ail}^{X} > V_{Ai^*}^{X}$? Czy jest sens podejmować trud targowania się o rozwiązanie, które nie przyniesie korzyści

W sytuacji, gdy dla danego a_i nie istnieją strategie h_l nie gorsze niż h^* wówczas można przyjąć, iż strategia $\overline{h}$ jest tożsama ze strategią h^* (tak w sensie jej wartości, jak i prawdopodobieństwa wyboru).

Oznaczmy przez $\overline{V}_{Ai}^{X}$ wartość strategii $\overline{h}$, postrzeganą z punktu widzenia gracza A dla określonej strategii a_i. Przykładowo, jeśli przyjmiemy za X kryterium Laplace'a, wówczas:

$$\overline{V}_{Ai}^{Lap} = \frac{1}{L_{i*}} \sum_{l=1, V_{Ail}^{Lap} \geqslant V_{Ai*}^{Lap}}^{L} V_{Ail}^{Lap} : \forall i \tag{3.36}$$

gdzie L_{i*} oznacza liczbę strategii h_l wchodzących w skład strategii $\overline{h}$ dla strategii a_i. Dla kryterium Walda:

$$\overline{V}_{Ai}^{Wal} = \min_{l, V_{Ail}^{Wal} \geqslant V_{Ai*}^{Wal}} V_{Ail}^{Wal} : \forall i \tag{3.37}$$

Dla kryterium Optymistycznego:

$$\overline{V}_{Ai}^{Opt} = \max_{l, V_{Ail}^{Opt} \geqslant V_{Ai*}^{Opt}} V_{Ail}^{Opt} : \forall i \tag{3.38}$$

Dla kryterium Savage'a[23]:

$$\overline{V}_{Ai}^{Sav} = \min_{l, V_{Ail}^{Sav} \geqslant V_{Ai*}^{Sav}} V_{Ail}^{Sav} : \forall i \tag{3.39}$$

W sposób analogiczny wyznaczamy wartość strategii h_l dla pozostałych kryteriów X.

Oznaczmy przez p_{il}^{B} prawdopodobieństwo, iż strategia h_l ma przy ustalonej strategii a_i dla gracza B większą wartość aniżeli strategia h^*. W przypadku nieznajomości macierzy wypłat gracza B przyjąć można, iż $p_{il}^{B} = 0.5$. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że żadna ze strategii wchodzących w skład strategii $\overline{h}$ nie będzie dla gracza B lepsza niż h^*, równa jest iloczynowi prawdopodobieństw $(1 - p_{il}^{B})$. Stąd wyznaczyć można prawdopodobieństwo $p_{i\overline{h}}$

względem tego, które aktualnie się posiada? Aby na to pytanie trafnie odpowiedzieć należy rozpatrzyć co najmniej trzy następujące kwestie. Po pierwsze, strategia h_l, dla której $V_{Ail}^{X} = V_{Ai*}^{X}$ w jednej grze (np. o zysk), może mieć już inną wartość - potencjalnie lepszą - w innej grze (np. o liczbę abonentów). Po drugie, strategia h_l może się okazać korzystniejsza od strategii h^* dla gracza B. Wybór strategii h_l będzie wówczas swoistym „powiększeniem ciastka", którym gracze między sobą mają się dzielić [51, 176]. Różnica wartości strategii h_l i h^* dla gracza B określa wartość nadwyżki korzyści, którą gracze mogą się wzajemnie podzielić. Trzecia kwestia związana jest z aspektem kolejności ruchów graczy. W przypadku, gdy zanim dojdzie do negocjacji stawek rozliczeniowych gracz B ustali swoje ceny na rynku detalicznym, wartość strategii h_l może się okazać większa od wartości strategii h^* (w przypadku, gdy ustalone są już strategie a_i i b_j, wartość strategii h_l nie wyraża się już w formie agregatu opartego na określonym kryterium wyboru strategii X, lecz jest konkretną wartością wypłaty, zależną od wybranych a_i oraz b_j).

[23] Przypomnijmy, iż dla kryterium Savage'a oraz dla pozostałych kryteriów operujących na macierzy strat dana strategia h_l ma wartość tym większą, im mniejszą daje wartość straty.

osiągalności strategii $\overline{h}$ (osiągalności wartości $\overline{V}_{Ai}^{X}$) dla każdej strategii a_i:

$$p_{i\overline{h}} = 1 - \prod_{l, V_{Ail}^{X} \geqslant V_{Ai*}^{X}} (1 - p_{il}^{B}) : \forall i, \tag{3.40}$$

co w przypadku nieznajomości macierzy wypłat gracza B zapisać można jako:

$$p_{i\overline{h}} = 1 - 0.5^{L_{i*}} : \forall i. \tag{3.41}$$

Sytuacja decyzyjna upraszcza się teraz do rozstrzygnięcia, którą spośród strategii a_i wybrać wiedząc, że każda z nich daje pewną wartość V_{Ai*}^{X} i prawdopodobną z prawdopodobieństwem $p_{i\overline{h}}$ wartość $\overline{V}_{Ai}^{X}$. Problem ten potraktować można jako problem wielokryterialny, a do jego rozwiązania zastosować opisaną w punkcie 3.4 Metodę Punktu Odniesienia. Optymalizowanymi kryteriami z_j mogą tu być dla przykładu:

- $z_j = V_{Ai*}^{X}$ - wartość strategii h^* (kryterium maksymalizowane).
- $z_j = \overline{V}_{Ai}^{X}$ - wartość strategii $\overline{h}$ (kryterium maksymalizowane).
- $z_j = p_{i\overline{h}}$ - prawdopodobieństwo osiągalności strategii $\overline{h}$ dla ustalonej strategii a_i (kryterium maksymalizowane).
- $z_j = p_{i\overline{h}} \cdot \overline{V}_{Ai}^{X}$ - wartość oczekiwana wartości strategii $\overline{h}$ (kryterium maksymalizowane).
- $z_j = V_{Ai*} + p_{i\overline{h}} \cdot \overline{V}_{Ai}^{X}$ - wartość oczekiwana wypłaty (liczonej w sensie kryterium X) przy wyborze strategii a_i (kryterium maksymalizowane).

Możliwym jest również stosowanie podejścia prostszego - dwukryterialnego. Wybierając dwa kryteria oceny - np. wartość strategii h^* ($z_1 = V_{Ai*}^{X}$), oraz wartość oczekiwaną wypłaty przy wyborze strategii a_i ($z_2 = V_{Ai*} + p_{i\overline{h}} \cdot \overline{V}_{Ai}^{X}$) - ustala się wartość progową jednego z kryteriów, a następnie spośród strategii a_i, dla których to ograniczenie jest spełnione wybiera się tę, która ma najlepszą wartość drugiego kryterium [131]. To ostatnie podejście zilustrujemy na przykładzie.

Przykład 3.4

Rozważmy następującą sytuację. Operator A zamierza wprowadzić na rynek nową ofertę usługową, a wraz z tym nowy pakiet cen dla klientów detalicznych. Rozważana jest możliwość wprowadzenia jednej z trzech strategii cenowych: a_1, a_2 i a_3. W niedługim czasie ma nastąpić renegocjacja umowy o połączenia międzysieciowe z operatorem B, który również szykuje się do wprowadzenia nowej oferty usługowej. Znane są rekomendowane przez regulatora stawki rozliczeniowe za połączenia międzysieciowe (strategia $h_1 = h^*$). Operator A rozważa możliwość zaakceptowania dodatkowo dwóch różnych struktur wysokości stawek rozliczeniowych (strategie

h_2 i h_3). Na podstawie przeprowadzonych analiz i wywiadu operator A przewiduje, iż operator B przyjąć może jedną z trzech możliwych ofert usługowych - b_1, b_2 i b_3. Sytuacja pozostałych konkurencyjnych operatorów jest ustabilizowana i A nie przewiduje w najbliższej przyszłości jakichś szczególnych zmian w ich ofercie i zasadach wzajemnej współpracy. Obaj operatorzy A i B dążą do szybkiej maksymalizacji zysku. Operator A nie zna modelu kosztów operatora B. W oparciu o model popytu i model kosztów operatora A, dla wszystkich możliwych kombinacji strategii na rynkach detalicznych i na rynku hurtowym obliczono wartość spodziewanego zysku operatora A (tabela 3.13). Załóżmy, iż operator A w swej decyzji kieruje się kryterium Walda postaci:

$$\max\{\min_{j,l} V_{jl}^{A}(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{3.42}$$

Którą ze strategii a_i powinien wybrać operator A?

Tabela 3.13: Macierze wypłat gracza A.

	$h_1 = h^*$			h_2			h_3		
	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3
a_1	2	4	6	6	5	8	6	7	6
a_2	5	4	3	6	6	7	3	4	5
a_3	4	4	4	2	3	4	5	4	6

W sytuacji, gdy nie uwzględnia się faktu, iż strategia $h_1 = h^*$ może zostać w trakcie negocjacji zawsze wybrana, wówczas w oparciu o kryterium Walda operator A wybierze strategię a_2, zapewniając sobie wypłatę równą co najmniej 3. Aby rozważyć sytuację z uwzględnieniem faktu, iż strategia $h_1 = h^*$ może zostać zawsze wybrana obliczymy wartości poszczególnych strategii h_l zgodnie z zależnością:

$$V_{Ail}^{Wal} = \min_{j} V_{jl}^{A}(a_i) : \forall i, l \tag{3.43}$$

W tabeli 3.14 zilustrowano wartości poszczególnych strategii h_l. Dokonamy agregacji strategii h_2 i h_3, uzyskując w ten sposób strategię $\overline{h}$. Wartość strategii $\overline{h}$ wyznaczymy zgodnie z zależnością:

$$\overline{V}_{Ai}^{Wal} = \min_{l, V_{Ail}^{Wal} \geqslant V_{Ai^*}^{Wal}} V_{Ail}^{Wal} : \forall i, h_l \neq h^* \tag{3.44}$$

W tabeli 3.15 zilustrowano wartości strategii h^* i $\overline{h}$ dla każdej strategii a_i operatora A, a także prawdopodobieństw $p_{i\overline{h}}$ przy założeniu, iż prawdopodobieństwo zdarzenia, że strategia h_l jest dla gracza B lepsza niż strategia h^* wynosi $p_{il}^{B} = 0.5$.

Tabela 3.14: Macierz wartości strategii $h_1 = h^*$, h_2 i h_3, wyliczonych w oparciu o kryterium Walda - V_{Ail}^{Wal}.

	h^*	h_2	h_3
a_1	2	5	6
a_2	3	6	3
a_3	4	2	4

Tabela 3.15: Macierz wartości strategii h^* i $\overline{h}$ wyliczonych w oparciu o kryterium Walda.

	h^*	$\overline{h}$	$p_{i\overline{h}}$
a_1	2	5	0.75
a_2	3	3	0.75
a_3	4	4	0.5

Z analizy wartości strategii h^* i $\overline{h}$, przedstawionych w tabeli 3.15 wnioskować możemy, iż przy uwzględnieniu faktu, że strategia h^* może zostać zawsze wybrana, strategia a_2 nie jest najlepsza w sensie kryterium Walda. Lepszą od niej jest strategia a_3 dająca pewną wartość 4 (wartość zawsze możliwej do wybrania strategii h^*). Strategia ta dominuje strategię a_2 (strategia a_2 nigdy nie powinna zostać wybrana). Wybór strategii a_1 nastąpi dla przykładu wówczas, gdy operator A swoją decyzję oprze na procedurze ustalenia wartości progowej wartości strategii h^* na poziomie równym 2, a następnie maksymalizacji wartości strategii $\overline{h}$ (lub jej wartości oczekiwanej). □

3.7 Optymalna kolejność ruchów graczy z punktu widzenia możliwości wpływania na wynik gry

Rozpatrzymy najprostszy przypadek występowania na rynku dwóch operatorów - dwóch graczy A i B. Wprowadźmy oznaczenia:

$\mathcal{A}$ - proces ustalania cen na rynku detalicznym przez gracza A,
$\mathcal{B}$ - proces ustalania cen na rynku detalicznym przez gracza B,
$\mathcal{H}$ - proces negocjacji stawek rozliczeniowych na rynku hurtowym między graczami A i B (ruch hipotetycznego gracza H).

Umiejscawiając powyższe procesy w czasie oraz zakładając rozłączność każdego z procesów otrzymamy sześć wariantów sekwencji ruchów graczy w grze rynkowej[24]: $\mathcal{ABH}$, $\mathcal{BAH}$, $\mathcal{HAB}$, $\mathcal{HBA}$, $\mathcal{AHB}$ i $\mathcal{BHA}$. Nie każda z sekwencji jest jednakowo pożądana przez graczy. Rozpatrując sytuację w sposób ogólny (odbiegający nawet od realiów rynku telekomunikacyjnego), spośród powyższych wariantów wyłonić można wariant potencjalnie najlepszy i najgorszy.

$\mathcal{BHA}$ - Jest to wariant najkorzystniejszy dla gracza A i najmniej korzystny dla gracza B. Przystępując do negocjacji cen na rynku hurtowym ($\mathcal{H}$), ceny na rynku detalicznym gracza B są już ustalone ($\mathcal{B}$). Znając ich wartość, gracz A przed przystąpieniem do negocjacji dokonać może szeregu analiz w celu wyłonienia najkorzystniejszych wariantów cen na rynku hurtowym obu graczy oraz odpowiadających im cen na własnym rynku detalicznym. Posiadanie wielu wariantów cen na rynku hurtowym, które zaproponować można graczowi B, wzmacnia pozycję gracza A w negocjacjach [51, 84, 116, 176, 196]. Po zakończeniu negocjacji, w zależności od przyjętego wariantu cen na rynku hurtowym, gracz A ma możliwość wybrania najkorzystniejszych dla siebie w tym przypadku cen na rynku detalicznym $\mathcal{A}$.

Przykładem tego wariantu jest sytuacja wchodzenia na rynek nowego operatora (A), który zanim ustali ceny na rynku detalicznym przystępuje do negocjacji cen na rynku hurtowym z funkcjonującym już operatorem (B).

$\mathcal{AHB}$ - Jest to wariant najmniej korzystny dla gracza A i najbardziej korzystny dla gracza B. Przystępując do negocjacji cen na rynku hurtowym, ceny na rynku detalicznym gracza A są już ustalone, tak więc negocjacje są ostatnim momentem, w którym gracz A ma wpływ na wynik gry. Ostateczny ruch należy do gracza B, którego decyzja odnośnie wysokości cen na rynku detalicznym może nie uwzględniać interesów gracza A.

W trakcie porównań pozostałych wariantów przyjmiemy założenie, iż na całościowy wynik gry ceny ustalone na rynku detalicznym i hurtowym mają porównywalny wpływ. Inaczej mówiąc, żaden z rynków nie jest jakoś szczególnie preferowany. Jedynym kryterium porządkującym rozpatrywane warianty będzie kryterium możliwości wpływania na wynik danego procesu. Zgodnie z tym kryterium przyjmiemy, iż z punktu widzenia gracza A, $\mathcal{A}$ jest bardziej preferowane od $\mathcal{H}$ w tym sensie, że na wynik tego pierwszego gracz A ma wyłączny wpływ, podczas gdy na wynik drugiego wpływ jest współdzielony z graczem B (wynik negocjacji zależy od obu stron). Ponadto założymy, iż korzystniej jest podejmować decyzję jako drugi. Założenie to wynika z faktu, że gracze nie znają nawzajem swoich macierzy wypłat, a co za tym idzie, nie są w stanie ocenić, czy opłacałoby się uprzedzić swoją decyzją gracza konkurencyjnego, niejako „wymuszając” na

[24] Z racji na fakt, iż gracze nie znają nawzajem swoich macierzy wypłat, z punktu widzenia gracza A sytuacja jednoczesnego wyboru strategii na rynku detalicznym jest tożsama z sytuacją, gdy A wybiera jako pierwszy.

nim określoną odpowiedź korzystną dla siebie. Podejmowanie decyzji jako drugi jest zawsze co najmniej nie gorsze, niż podejmowanie decyzji jako pierwszy[25], bowiem zawsze gracz może wybrać tę samą strategię, którą by wybrał, grając jako pierwszy, a jeśli inna strategia będzie w tej sytuacji korzystniejsza, to ją również może wybrać, poprawiając w ten sposób otrzymany wynik.

W związku z powyższym stwierdzamy, iż wariant $\mathcal{HBA}$ jest dla gracza A lepszy niż wariant $\mathcal{HAB}$. W obu tych wariantach najpierw dochodzi do negocjacji cen na rynku hurtowym $\mathcal{H}$, a dopiero potem ustalane są stawki na rynku detalicznym. Z racji, iż gracze nie znają nawzajem swoich macierzy wypłat lepiej jest dla każdego z nich grać jako drugi, stąd wariant $\mathcal{HBA}$ jest dla gracza A lepszy.

Z analogicznych powodów, spośród wariantów $\mathcal{BAH}$ i $\mathcal{ABH}$, lepszym dla gracza A jest wariant $\mathcal{BAH}$.

Opierając się na założeniu, iż w trakcie ustalania cen na rynku detalicznym $\mathcal{A}$, gracz A ma większy wpływ na wynik gry aniżeli w trakcie negocjacji cen na rynku hurtowym $\mathcal{H}$, oraz, że korzystniej jest się ruszyć jako drugi, wnioskujemy, iż wariant $\mathcal{HBA}$ jest lepszy dla A niż wariant $\mathcal{ABH}$.

Warianty $\mathcal{BAH}$ i $\mathcal{HAB}$ różnią się na pierwszej i ostatniej pozycji. Korzystniejsze dla gracza A jest, by ostatnim ruchem w grze były negocjacje $\mathcal{H}$, na których wynik gracz A ma wpływ, aniżeli decyzja gracza B odnośnie jego cen na rynku detalicznym $\mathcal{B}$. Stąd wniosek, iż wariant $\mathcal{BAH}$ jest lepszy dla gracza A od wariantu $\mathcal{HAB}$. Na mocy podobnego rozumowania wnioskujemy, iż wariant $\mathcal{ABH}$ jest lepszy niż wariant $\mathcal{HAB}$[26] oraz, że wariant $\mathcal{HBA}$ jest dla gracza A lepszy aniżeli wariant $\mathcal{BAH}$.

Z powyższych porównań wynika następujące uszeregowanie wariantów: najlepszym dla gracza A jest wariant $\mathcal{BHA}$, a następnie $\mathcal{HBA}$, $\mathcal{BAH}$, $\mathcal{ABH}$, $\mathcal{HAB}$ i wreszcie, najgorszym jest wariant $\mathcal{AHB}$. Z punktu widzenia gracza B pożądana kolejność jest dokładnie odwrotna.

3.8 Wpływ kolejności ruchów graczy na proces negocjacji

Opierając się w dalszym ciągu na poczynionych założeniach prześledzimy związek poszczególnych wariantów sekwencji ruchów graczy z samym procesem negocjacji, a ściślej mówiąc z optymalnym momentem ich rozpoczęcia i zakończenia.

$\mathcal{BHA}$ - Po ustaleniu cen na rynku detalicznym przez gracza B, gracz ten dążył będzie do opóźniania rozpoczęcia negocjacji do momentu, aż gracz A ustali swoje ceny na rynku

[25] Zasada ta jest prawdziwa wyłącznie w grach przeciwko naturze.

[26] Widać to wyraźniej, jeśli $\mathcal{AB}$ rozważać się będzie jako całość $\mathcal{AB} = \mathcal{C}$. Wówczas porównujemy warianty $\mathcal{CH}$ i $\mathcal{HC}$, z których, co łatwo zauważyć, pierwszy jest lepszym.

detalicznym tak, by przekształcić ten wariant w bardziej korzystny dla B wariant $\mathcal{BAH}$. Jeśli negocjacje stawek rozliczeniowych na rynku hurtowym mimo wszystko się rozpoczną, w interesie gracza B jest przedłużać negocjacje do momentu, aż gracz A ustali swoje ceny na rynku detalicznym. Gracz A zaś dążył będzie do rozpoczęcia i zakończenia negocjacji jeszcze zanim ustali ceny na rynku detalicznym.

$\mathcal{HBA}$ - Rozpoczęcie negocjacji stawek rozliczeniowych na rynku hurtowym w sytuacji, gdy żaden z graczy nie ustalił (nowych) cen na rynku detalicznym z jednej strony stawia obu graczy w jednakowej sytuacji, dając im tę samą motywację do szybkiego ich zakończenia. Z drugiej strony gracze mogą tu spekulować, grać na czas licząc, że konkurent ustali ceny na rynku detalicznym jako pierwszy. Analogiczna sytuacja zachodzi w wariancie $\mathcal{HAB}$.

$\mathcal{BAH}$ - Po ustaleniu cen na rynku detalicznym przez gracza B, w interesie gracza A jest jak najszybciej rozpocząć i zakończyć negocjacje tak, by przekształcić ten wariant w korzystniejszy dla A wariant $\mathcal{BHA}$. Gracz B dążył będzie jednakże do zachowania kolejności ruchów, czyli opóźniał będzie rozpoczęcie negocjacji, a w przypadku ich rozpoczęcia dążył będzie do ich przedłużania, aż gracz A ustali swoje ceny na rynku detalicznym. W sytuacji obustronnie ustalonych cen na rynku detalicznym, żaden z graczy nie ma już motywacji, by opóźniać rozpoczęcie negocjacji, a dalej, by je przedłużać[27]. Wariant $\mathcal{BAH}$, podobnie jak i wariant $\mathcal{ABH}$ jest najkorzystniejszy dla obu graczy z punktu widzenia sprawnego przeprowadzenia negocjacji.

$\mathcal{ABH}$ - Patrz komentarz do wariantu $\mathcal{BAH}$.

$\mathcal{HAB}$ - Patrz komentarz do wariantu $\mathcal{HBA}$.

$\mathcal{AHB}$ - Po ustaleniu cen na rynku detalicznym przez gracza A, gracz ten dążył będzie do opóźniania rozpoczęcia negocjacji do momentu, aż gracz B ustali swoje ceny na rynku detalicznym tak, by przekształcić ten wariant w bardziej korzystny dla A wariant $\mathcal{ABH}$. Jeśli negocjacje stawek rozliczeniowych na rynku hurtowym mimo wszystko się rozpoczną,

[27] Milcząco założyliśmy w tym miejscu, iż obu graczom docelowo zależy na połączeniu swych sieci. Takie założenie jest niewątpliwie słuszne w przypadku operatorów posiadających sieci o podobnych rozmiarach, mających podobną liczbę korzystających z ich usług abonentów. W przypadku dużej dysproporcji w rozmiarach sieci, operator większej sieci ma zwykle mniejszą motywację do wzajemnego połączenia, aniżeli operator sieci mniejszej. Potwierdza to doświadczenie wielu krajów, gdzie dawni monopoliści, posiadający duże sieci bywali często nieprzychylni zawieraniu umów o wzajemne połączenia z wchodzącymi na rynek nowymi operatorami [2, 20, 38, 65, 85, 94, 119, 136, 139, 144, 150, 152, 170, 180]. Mówiąc zatem, iż wariant $\mathcal{BAH}$ nie daje motywacji do opóźniania momentu rozpoczęcia lub przedłużania procesu negocjacji, podkreślaliśmy jedynie brak motywacji wynikającej bezpośrednio z faktu, iż ceny na rynkach detalicznych zostały ustalone.

w interesie gracza A jest przedłużać negocjacje do momentu, aż gracz B ustali swoje ceny na rynku detalicznym. Gracz B zaś dążył będzie do rozpoczęcia i zakończenia negocjacji jeszcze zanim ustali ceny na rynku detalicznym.

Z powyższej dyskusji wysnuć można wniosek, iż z punktu widzenia sprawności przeprowadzenia procesu negocjacji stawek rozliczeniowych na rynku hurtowym wskazane jest, by obie strony miały już ustalone ceny na rynku detalicznym. Przystępowanie do negocjacji w chwili, gdy któryś z graczy tych cen nie ustalił, wytwarza przeciwstawne motywacje po obu stronach: gracz, który ceny na rynku detalicznym ma już ustalone, dąży do opóźniania zarówno rozpoczęcia, jak i zakończenia negocjacji; gracz, który tych cen nie ustalił, chce negocjacje jak najszybciej rozpocząć i równie szybko zakończyć.

3.9 Korzyść ze zmiany kolejności ruchów graczy

Rozpatrywanie gry przeciwko naturze zakłada, iż gracz A nie zna macierzy wypłat gracza B oraz, że gracz A wybiera strategię gry jako pierwszy. Rodzi się tu istotne pytanie o zysk związany ze zmianą kolejności ruchów graczy, a co się z tym wiąże o koszt, jaki opłaca się ponieść, by tę kolejność odwrócić. Koszt ten nazywać będziemy *kosztem krytycznym*.

Zmiana sekwencji ruchów graczy dokonywać się może na dwa sposoby:

- po przez zmianę momentu zakończenia negocjacji cen na rynku hurtowym,
- po przez zmianę momentu ustalenia cen na rynku detalicznym.

Wynikają z tego następujące, korzystne dla gracza A elementarne zamiany sekwencji ruchów:

- $\mathcal{AB}$ na $\mathcal{BA}$ ($\mathcal{AB} \Rightarrow \mathcal{BA}$) - w wyniku której najpierw operator B ustala swoje ceny na rynku detalicznym, a następnie to samo czyni operator A.
- $\mathcal{AH}$ na $\mathcal{HA}$ ($\mathcal{AH} \Rightarrow \mathcal{HA}$) - w wyniku której negocjacje cen na rynku hurtowym poprzedzają moment ustalenia przez operatora A cen na rynku detalicznym.
- $\mathcal{HB}$ na $\mathcal{BH}$ ($\mathcal{HB} \Rightarrow \mathcal{BH}$) - w wyniku której ceny na rynku detalicznym operatora B są w trakcie negocjacji cen na rynku hurtowym ustalone i obu graczom znane.

Teoretyczna dopuszczalność poszczególnych zamian wynika z zaistniałego stanu faktycznego. I tak:

1. W przypadku, gdy operator B ustalił już ceny na rynku detalicznym, a stawki rozliczeniowe na rynku hurtowym oraz ceny na rynku detalicznym operatora A nie są jeszcze ustalone,

jedynymi możliwymi wariantami sekwencji ruchów są $\mathcal{BAH}$ oraz $\mathcal{BHA}$. Interesującym jest wówczas dla operatora A pytanie o koszt, jaki warto ponieść, aby spośród powyższych wybrana została sekwencja $\mathcal{BHA}$. Jest to pytanie o wartość zamiany $\mathcal{AH} \Rightarrow \mathcal{HA}$.

2. W przypadku, gdy operator A ustalił już ceny na rynku detalicznym, a stawki rozliczeniowe na rynku hurtowym oraz ceny na rynku detalicznym operatora B nie są jeszcze ustalone, jedynymi możliwymi wariantami sekwencji ruchów są $\mathcal{ABH}$ oraz $\mathcal{AHB}$. Interesującym jest wówczas dla operatora A pytanie o koszt, jaki warto ponieść, aby spośród powyższych wybrana została sekwencja $\mathcal{ABH}$. Jest to pytanie o wartość zamiany $\mathcal{HB} \Rightarrow \mathcal{BH}$.

3. W przypadku, gdy ani operator A, ani operator B nie ustalili jeszcze cen na rynku detalicznym, zaś stawki rozliczeniowe na rynku hurtowym są już ustalone, jedynymi możliwymi wariantami sekwencji ruchów są $\mathcal{HAB}$ oraz $\mathcal{HBA}$. Interesującym jest wówczas dla operatora A pytanie o koszt, jaki warto ponieść, aby spośród powyższych wybrana została sekwencja $\mathcal{HBA}$. Jest to pytanie o wartość zamiany $\mathcal{AB} \Rightarrow \mathcal{BA}$.

4. W przypadku, gdy ani ceny na rynkach detalicznych, ani ceny na rynku hurtowym nie są jeszcze ustalone, możliwe są wszystkie warianty sekwencji ruchów. Operator A zainteresowany jest zatem poznaniem kosztu, jaki warto ponieść z punktu widzenia każdej z zamian: $\mathcal{AH} \Rightarrow \mathcal{HA}$, $\mathcal{HB} \Rightarrow \mathcal{BH}$ oraz $\mathcal{AB} \Rightarrow \mathcal{BA}$, biorąc za punkt wyjścia sytuację najmniej korzystną dla gracza A, zakładającą, iż ustalanie jego cen na rynku detalicznym jest pierwszym ruchem w grze.

Z punktu widzenia analizy sytuacji decyzyjnej trzy pierwsze przypadki potraktować można w ten sam sposób, przyjmując, iż gracz A rozgrywa grę przeciwko naturze reprezentującej:

- hipotetycznego gracza H, którego strategie odpowiadają możliwym wynikom negocjacji stawek na rynku hurtowym - $\mathcal{H}$ (sytuacja, gdy ustalone są ceny na rynku detalicznym gracza B - $\mathcal{B}$),

- gracza B, którego strategie odzwierciedlały będą dopuszczalne wartości cen na jego rynku detalicznym - $\mathcal{B}$, z tym rozróżnieniem, iż strategie gracza A odpowiadały będą:
  - możliwym wynikom negocjacji cen na rynku hurtowym - $\mathcal{H}$ (sytuacja, gdy ustalone są już ceny na rynku detalicznym gracza A - $\mathcal{A}$),
  - dopuszczalnym wartościom cen na rynku detalicznym gracza A - $\mathcal{A}$ (sytuacja, gdy ustalone są już stawki rozliczeniowe na rynku hurtowym - $\mathcal{H}$).

Sytuację tę określimy jako *grę przeciwko pojedynczej naturze*. W przypadku czwartym natura reprezentować będzie jednocześnie zarówno gracza B i jego dopuszczalne ceny na rynku detalicznym $\mathcal{B}$, jak również hipotetycznego gracza H, którego strategie odpowiadają możliwym wartościom stawek rozliczeniowych na rynku hurtowym, ustalonym w procesie negocjacji $\mathcal{H}$ pomiędzy graczami A i B. Sytuację tę określimy jako *grę przeciwko podwójnej naturze*.

Sytuacja growa składa się zatem z dwóch faz. Najpierw gracz A rozgrywa grę przeciwko podwójnej naturze, kiedy to ma możliwość albo zagrania jako pierwszy (ustalenia cen na rynku detalicznym $\mathcal{A}$), albo zabiegania o zmianę kolejności ruchów tak, by pierwszym ruchem było ustalenie cen na rynku detalicznym przez gracza B, albo ustalenie w procesie negocjacji stawek rozliczeniowych na rynku hurtowym $\mathcal{H}$. W fazie drugiej rozgrywana jest gra przeciwko pojedynczej naturze, w której strategie gry obu graczy są uzależnione od sposobu rozegrania pierwszej fazy (gry przeciwko podwójnej naturze). I tym razem gracz A ma możliwość zagrania jako pierwszy lub zabiegania o zmianę kolejności ruchów graczy. Sposób wyznaczania korzyści, wynikającej ze zmiany kolejności ruchów zilustrujemy osobno dla obu faz.

3.9.1 Korzyść zmiany kolejności ruchów w grze przeciwko podwójnej naturze

Rozpatrujemy sytuację, w której operator A stoi przed dylematem: czy ustalać ceny na rynku detalicznym $\mathcal{A}$, w sytuacji nieznajomości cen $\mathcal{B}$ na rynku detalicznym gracza B oraz nieznajomości stawek rozliczeniowych na rynku hurtowym $\mathcal{H}$, czy też zabiegać o zmianę kolejności ruchów w grze? Sytuację tę określiliśmy mianem gry przeciwko podwójnej naturze. Natura reprezentuje tu zarówno gracza B i jego potencjalne strategie związane z cenami na rynku detalicznym, jak też hipotetycznego gracza H, którego strategie odzwierciedlają potencjalne wyniki negocjacji stawek rozliczeniowych na rynku hurtowym $\mathcal{H}$ pomiędzy graczami A i B.

Pytamy o korzyść, jaką odnieść może gracz A z samego faktu, iż nie zagra jako pierwszy (nie ustali cen na rynku detalicznym $\mathcal{A}$). Korzyść ta jest odzwierciedleniem krytycznej wartości kosztu, jaki opłaca się graczowi A ponieść, aby kolejność ruchów w grze odwrócić. Stawiamy więc pytanie o wartość korzyści dopuszczalnych w tym wariancie elementarnych zamian $\mathcal{AH} \Rightarrow \mathcal{HA}$ oraz $\mathcal{AB} \Rightarrow \mathcal{BA}$.

W przypadku, gdy nie przewidywany jest arbitraż regulatora lub brak jest obowiązku przedstawiania oferty ramowej, czyli innymi słowy nie istnieje strategia h^* (lub też - co na jedno wychodzi - nie jest ona znana), którą obaj gracze w trakcie negocjacji w każdej chwili mogą wybrać, do wyznaczenia wartości korzyści z poszczególnych zamian wykorzystać możemy w sposób bezpośredni przedstawioną w punkcie 3.5 Koncepcję Operatora Najbardziej Obiecującego. Wprowadzony tam współczynnik wartości informacji VI_{AO}^{X} odnośnie decyzji operatora O, wyznaczonej w oparciu o kryterium wyboru strategii X posłuży nam wprost jako miara korzyści wynikającej ze zmiany kolejności ruchów w grze. Zmiana kolejności nie jest bowiem niczym innym, jak tylko poznaniem decyzji jednego spośród graczy, reprezentowanych przez naturę N (cen na rynku detalicznym $\mathcal{B}$ gracza B, lub stawek rozliczeniowych na rynku hurtowym $\mathcal{H}$, będących strategiami hipotetycznego gracza H), zanim A podejmie decyzję własną. Oznaczmy:

SQ_A^X	-	(*Status Quo*) wypłata obliczona dla gracza A w oparciu o kryterium wyboru strategii X, przy założeniu, że A rusza się jako pierwszy.
KD_{AO}^X	-	(*Known Decision of operator O*) wypłata gracza A wyliczona w oparciu o kryterium X przy znajomości decyzji gracza O (O ruszył się jako pierwszy).
VI_{AO}^X	-	(*Value of Information*) wartość informacji dla gracza A, odnośnie decyzji gracza O wyliczona w oparciu o kryterium X (korzyść gracza A ze zmiany kolejności ruchów $\mathcal{AO} \Rightarrow \mathcal{OA}$).

Wartość korzyści VI_{AO}^X obliczymy jako wartość bezwzględną z różnicy między KD_{AO}^X i SQ_A^X:

$$VI_{AO}^X = |KD_{AO}^X - SQ_A^X|. \tag{3.45}$$

Wartości współczynników SQ_A^X oraz KD_{AO}^X dla poszczególnych kryteriów wyboru strategii X wyznaczamy zgodnie zależnościami przedstawionymi w Dodatku C. Operator O symbolizuje tu operatora B lub hipotetycznego operatora H.

W przypadku istnienia strategii h^*, czyli w sytuacji, gdy przewiduje się arbitraż regulatora, lub też istnieje obowiązek przedstawiania oferty ramowej, korzyść ze zmiany kolejności ruchów w grze rozpatrywać można na trzy sposoby:

1. z założeniem, iż zostanie wybrana strategia h^*,
2. z założeniem, iż strategia h^* zostanie odrzucona[28],
3. z założeniem, iż strategia h^* może być równie dobrze wybrana, jak i odrzucona.

Rozpatrzmy powyższe przypadki.

1. *W trakcie negocjacji wybrana zostanie strategia h^*.*
   Założenie, iż w trakcie negocjacji zostanie wybrana strategia h^* tożsame jest z sytuacją, gdy hipotetyczny gracz H ma do wyboru tylko jedną strategię. W tej sytuacji wynik negocjacji jest już zdeterminowany. Zamiana $\mathcal{AH} \Rightarrow \mathcal{HA}$ nie przyniesie więc graczowi A żadnej korzyści ($VI_{AH}^X = 0$). W istocie cała gra upraszcza się do gry przeciwko pojedynczej

[28] Odrzucenie strategii h^* nastąpić może wyłącznie w sytuacji istnienia oferty ramowej i to tylko przez operatora, na którym nie ciąży obowiązek jej przedstawiania. Arbitraż z definicji nie może być odrzucony, a co najwyżej można go uniknąć.

naturze, której strategie reprezentują ceny na rynku detalicznym gracza B - $\mathcal{B}$. Sposób wyznaczania wartości korzyści z zamiany $\mathcal{AB} \Rightarrow \mathcal{BA}$ w grze przeciwko pojedynczej naturze opisany jest w punkcie 3.9.2.

2. *W trakcie negocjacji wybrana zostanie strategia inna niż h^*.*

   Założenie, iż w trakcie negocjacji wybrana zostanie strategia inna niż h^* oznacza w istocie, iż hipotetyczny gracz H ma o jedną strategię mniej. Sposób wyznaczania korzyści z zamian $\mathcal{AH} \Rightarrow \mathcal{HA}$ oraz $\mathcal{AB} \Rightarrow \mathcal{BA}$ przebiegać zatem będzie identycznie, jak w sytuacji nie istnienia strategii h^* z tą różnicą, iż hipotetyczny gracz H będzie miał o jedną strategię mniej.

3. *W trakcie negocjacji wybrana może zostać każda spośród strategii (w tym h^*).*

   Sytuację tę rozpatrywać można w sposób identyczny do uprzednio rozpatrywanej sytuacji nieistnienia strategii h^* (strategia h^* traktowana jest jak każda inna).

Przykład 3.5

Dawny monopolista, operator A przygotowuje się do wprowadzenia usługi *video on demand*. Rozważa wprowadzenie jednej z dwóch strategii cenowych dla użytkowników usługi:

a_1 - miesięczna opłata ryczałtowa niezależna od wielkości przesyłanego ruchu, w wysokości trzykrotnej wartości aktualnego abonamentu telefonicznego.

a_2 - opłata zależna wyłącznie od wielkości przesyłanego ruchu.

Operator A spodziewa się, iż w najbliższym czasie usługę tę świadczyć zacznie również jego najsilniejszy konkurent operator B. Operator A przypuszcza, iż B przyjmie analogiczne strategie cenowe ($a_i = b_i$), oraz podobnie jak i on, dążył będzie do maksymalizacji zysku. Operator A nie zna modelu kosztów operatora B.

Lokalna infrastruktura sieciowa umożliwia operatorowi B dostęp szerokopasmowy tylko do części potencjalnych użytkowników nowej usługi. Stąd przypuszczenie operatora A, iż B będzie żądał możliwości współkorzystania z lokalnej pętli abonenckiej operatora A. Względem rekomendowanych przez regulatora rynku opłat za dostęp do uwolnionej pętli abonenckiej (strategia h_1), operator A uwzględnia możliwość zawarcia umowy z operatorem B na zasadach określonych przez strategię h_2. Wybór jednej spośród strategii h_l uzależniony jest od porozumienia zawartego przez operatorów A i B w trakcie negocjacji ($\mathcal{H}$).

W tabeli 3.16 zilustrowano macierz wypłat operatora A w tej grze. Załóżmy, iż w sytuacji konieczności gry jako pierwszy, operator A kieruje się kryterium Walda postaci:

$$\max\{\min_{j,l} V_{jl}^{A}(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\} \tag{3.46}$$

przy czym j oznacza indeks strategii cen oferowanych użytkownikom końcowym operatora B za korzystanie z usługi (b_j), natomiast l jest indeksem strategii hipotetycznego gracza H, którego

Tabela 3.16: Macierz wypłat operatora A w grze przeciwko podwójnej naturze.

h_1

	b_1	b_2
a_1	3	1
a_2	2	3

h_2

	b_1	b_2
a_1	4	2
a_2	1	3

strategie reprezentują rozważane przez A poziomy cen za dostęp do lokalnej pętli (h_l). Wartość wypłaty, jaką zapewnić może sobie A w sytuacji, gdy miałby grać jako pierwszy wynosi:

$$SQ_A^{Wald} = \max_i \min_{j,l} V_{jl}^A(a_i) = 1 \tag{3.47}$$

Analizę wartości korzyści z zamiany kolejności ruchów przeprowadzimy przy założeniu, iż operator A nie jest pewien, która ze strategi h_l zostanie wybrana w trakcie negocjacji.

Wartość wypłaty, jaką zapewnić sobie może operator A, powstrzymując się od ustalania cen dla użytkowników końcowych (wybór strategii a_i) do momentu, aż zawarte zostanie porozumienie o współkorzystanie z pętli lokalnej, wyniesie:

$$KD_{AH}^{Wald} = \min_l \max_i \min_j V_{jl}^A(a_i) = 2. \tag{3.48}$$

Wartość wypłaty, jaką zapewnić sobie może operator A, powstrzymując się od ustalania cen dla użytkowników końcowych (wybór strategii a_i) do momentu, aż ceny dla użytkowników końcowych ustali operator B, wyniesie:

$$KD_{AB}^{Wald} = \min_j \max_i \min_l V_{jl}^A(a_i) = 3. \tag{3.49}$$

Stąd wartość korzyści (wartość informacji związanej z poznaniem decyzji określonego gracza) dla poszczególnych elementarnych zmian sekwencji ruchów wyniesie:

$$VI_{AH}^{Wald} = |KD_{AH}^{Wald} - SQ_A^{Wald}| = 2 - 1 = 1, \tag{3.50}$$

dla zamiany $\mathcal{AH} \Rightarrow \mathcal{HA}$, oraz

$$VI_{AB}^{Wald} = |KD_{AB}^{Wald} - SQ_A^{Wald}| = 3 - 1 = 2. \tag{3.51}$$

dla zamiany $\mathcal{AB} \Rightarrow \mathcal{BA}$.

$\square$

3.9.2 Korzyść ze zmiany kolejności ruchów w grze przeciwko pojedynczej naturze

W zależności od sposobu rozegrania pierwszej fazy gry - gry przeciwko podwójnej naturze, w fazie drugiej możliwe są trzy sytuacje:

1. *Ustalone są już ceny na rynku detalicznym gracza B.*
   W tym wariancie gracz A rozgrywa grę przeciwko naturze, która reprezentuje hipotetycznego gracza H, z jego strategiami odzwierciedlającymi możliwe wyniki negocjacji cen na rynku hurtowym $\mathcal{H}$. Strategiami gracza A są jego ceny na rynku detalicznym $\mathcal{A}$. Rozpatrujemy tu możliwość zamiany $\mathcal{AH} \Rightarrow \mathcal{HA}$ i pytamy o związaną z nią korzyść VI^X_{AH}.

2. *Ustalone są już ceny na rynku detalicznym gracza A.*
   W tym wariancie gracz A rozgrywa grę przeciwko naturze, która reprezentuje gracza B i jego ceny na rynku detalicznym $\mathcal{B}$. Strategiami gracza A są możliwe wysokości stawek rozliczeniowych na rynku hurtowym $\mathcal{H}$ (strategie hipotetycznego gracza H są strategiami gracza A). Rozpatruje się tu możliwość zamiany $\mathcal{HB} \Rightarrow \mathcal{BH}$ i pytamy o związaną z nią korzyść VI^X_{HB}.

3. *Ustalone są już stawki rozliczeniowe na rynku hurtowym $\mathcal{H}$.*
   W tym wariancie gracz A rozgrywa grę przeciwko naturze, która reprezentuje gracza B i jego ceny na rynku detalicznym $\mathcal{B}$. Strategiami gracza A są jego ceny na rynku detalicznym $\mathcal{A}$. Rozpatruje się tu możliwość zamiany $\mathcal{AB} \Rightarrow \mathcal{BA}$ i pytamy o związaną z nią korzyść VI^X_{AB}.

Pytamy o korzyść, jaką odnieść może gracz A w grze przeciwko pojedynczej naturze, jeśli wybierze swoją strategię gry nie jako pierwszy, lecz jako drugi. Korzyść ta jest odzwierciedleniem krytycznej wartości kosztu, jaki opłaca się graczowi A ponieść, aby kolejność ruchów w grze odwrócić.

Oznaczmy:

SQ^X_A	-	(*Status Quo*) wypłata obliczona dla gracza A w oparciu o kryterium wyboru strategii X, przy założeniu, że A rusza się jako pierwszy.
KD^X_{AO}	-	(*Known Decision of operator O*) wypłata wyliczona dla gracza A w oparciu o kryterium wyboru strategii X, przy znajomości decyzji natury - gracza O (O ruszył się jako pierwszy).
VI^X_{AO}	-	(*Value of Information*) wartość informacji odnośnie decyzji gracza O wyliczona w oparciu o kryterium X (korzyść ze zmiany kolejności ruchów).

Wartość wypłaty SQ_A^X wyznaczamy zgodnie z definicją kryterium X (patrz Dodatek A). I tak dla przykładu SQ_A^{Wald}, czyli wartość wypłaty, wyliczonej dla gracza A w oparciu o kryterium Walda wyznaczymy zgodnie z zależnością:

$$SQ_A^{Wald} = \max_i \min_j V_j^A(a_i) \tag{3.52}$$

Aby określić wartość wypłaty KD_{AO}^X koniecznym jest określenie strategii, jaką wybierze gracz A w odpowiedzi na wybraną przez naturę (gracza O) strategię n_j. Strategię tę oznaczymy jako $\hat{a}(n_j)$. Strategią tą będzie ta, która dla danego n_j maksymalizuje wypłatę gracza A[29]:

$$\hat{a}(n_j) = \arg\max_i V_j^A(a_i) : \forall j. \tag{3.53}$$

Wartość otrzymanej w ten sposób wypłaty $\hat{V}_j^A$ wyznaczymy z zależności:

$$\hat{V}_j^A = V_j^A(\hat{a}(n_j)) = \max_i V_j^A(a_i) : \forall j. \tag{3.54}$$

W ten sposób otrzymamy wektor najlepszych wypłat (największych wartości w kolumnach macierzy wypłat), jakie uzyskać może gracz A dla każdej z możliwych strategii n_j - $\hat{\mathbf{V}}^A = [\hat{V}_1^A, \ldots, \hat{V}_j^A, \ldots, \hat{V}_J^A]$, gdzie J oznacza liczbę strategii natury. Wartość wypłaty KD_{AO}^X wyznaczymy w oparciu o odpowiednią dla kryterium X zależność (patrz (3.10) do (3.26)), zastosowaną do wektora $\hat{\mathbf{V}}^A$. I tak np. dla kryterium Walda:

$$KD_{AO}^{Wald} = \min_j \hat{V}_j^A. \tag{3.55}$$

Wartość korzyści VI_{AO}^X obliczymy jako wartość bezwzględną z różnicy między KD_{AO}^X i SQ_A^X:

$$VI_{AO}^X = |KD_{AO}^X - SQ_A^X|. \tag{3.56}$$

W przypadku, gdy:

- w wyniku rozegrania gry przeciwko podwójnej naturze ustalone zostały ceny $\mathcal{B}$ na rynku detalicznym gracza B, korzyść $VI_{AO}^X = VI_{AH}^X$ i oznacza korzyść z zamiany $\mathcal{AH} \Rightarrow \mathcal{HA}$.
- w wyniku rozegrania gry przeciwko podwójnej naturze ustalone zostały ceny $\mathcal{A}$ na rynku detalicznym gracza A, korzyść $VI_{AO}^X = VI_{HB}^X$ i oznacza korzyść z zamiany $\mathcal{HB} \Rightarrow \mathcal{BH}$.
- w wyniku rozegrania gry przeciwko podwójnej naturze ustalone zostały stawki rozliczeniowe $\mathcal{H}$ na rynku hurtowym, korzyść $VI_{AO}^X = VI_{AB}^X$ i oznacza korzyść z zamiany $\mathcal{AB} \Rightarrow \mathcal{BA}$.

[29] Jeśli pożądanym kierunkiem optymalizacji funkcji wypłaty jest jej minimalizacja (np. minimalizacja kosztów świadczenia usług) lub stabilizacja (np. utrzymanie aktualnego poziomu ruchu w danej relacji) to należy ją uprzednio przekształcić na postać maksymalizowaną (patrz punkt 2.3.4 w rozdziale 2).

Jak zmieni się analiza korzyści, gdy założymy, iż istnieje możliwość arbitrażu regulatora, lub jeden z operatorów zobowiązany jest do przedstawiania oferty ramowej (istnieje strategia h^*)?

Po pierwsze zauważyć trzeba, iż problem ten pojawia się tylko wówczas, gdy w grze przeciwko pojedynczej naturze jednym z graczy jest hipotetyczny gracz H. W punkcie wyjścia więc odrzucamy sytuację, w której w ramach gry przeciwko podwójnej naturze pierwszym ruchem były negocjacje stawek rozliczeniowych. Pozostają nam zatem dwie sytuacje:

1. Hipotetyczny gracz H reprezentuje strategie gracza A.
2. Hipotetyczny gracz H reprezentuje strategie gracza B.

W analogiczny sposób, jak w przypadku gry przeciwko podwójnej naturze, rozpatrzmy trzy możliwe założenia odnośnie możliwości wyboru strategii h^*.

1. *W trakcie negocjacji wybrana zostanie strategia h^*.*
   Założenie, iż w trakcie negocjacji zostanie wybrana strategia h^* tożsame jest z sytuacją, gdy hipotetyczny gracz H ma do wyboru tylko jedną strategię. W tej sytuacji wynik negocjacji jest już zdeterminowany. Stąd też, zarówno w sytuacji, gdy hipotetyczny gracz H reprezentuje strategie gracza A, jak i B, zamiana kolejności ruchów nie przyniesie graczowi A żadnej korzyści ($VI^X_{AH} = VI^X_{HB} = 0$).

2. *W trakcie negocjacji wybrana zostanie strategia inna niż h^*.*
   Założenie, iż w trakcie negocjacji wybrana zostanie strategia inna niż h^* oznacza w istocie, iż hipotetyczny gracz H ma o jedną strategię mniej. Sposób wyznaczania korzyści z zamian $\mathcal{AH} \Rightarrow \mathcal{HA}$ oraz $\mathcal{AB} \Rightarrow \mathcal{BA}$ przebiegać zatem będzie identycznie, jak w sytuacji nie istnienia strategii h^* z tą różnicą, iż hipotetyczny gracz H będzie miał o jedną strategię mniej.

3. *W trakcie negocjacji wybrana może zostać każda spośród strategii (w tym h^*).*
   Sytuację tę rozpatrywać można w sposób identyczny do uprzednio rozpatrywanej sytuacji nieistnienia strategii h^* (strategia h^* traktowana jest jak każda inna).

Przykład 3.6

W tabeli 3.17 zilustrowano macierz wypłat gracza A w grze przeciwko pojedynczej naturze N. Wyznaczymy wartość korzyści dla gracza A wynikającej ze zmiany kolejności ruchów graczy przy założeniu, iż grając jako pierwszy gracz ten opierałby swą decyzję na kryterium wartości oczekiwanej Laplace'a postaci:

$$\max\{\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} V_j^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{3.57}$$

Tabela 3.17: Macierz wypłat gracza A w grze przeciwko pojedynczej naturze.

	n_1	n_2	n_3	n_4
a_1	2	2	0	1
a_2	1	1	1	2
a_3	0	4	0	1
a_4	1	3	2	0

Grając jako pierwszy, w oparciu o kryterium Laplace'a gracz A wybrałby strategię a_4, która zapewnia mu wartość oczekiwaną wypłaty:

$$SQ_A^{Lap} = \max_i \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} V_j^A(a_i) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} V_j^A(a_4) = 1.5. \tag{3.58}$$

Grając jako drugi, gracz A dla każdej strategii natury n_j wybierał będzie taką strategię $\hat{a}(n_j)$, która zmaksymalizuje wartość wypłaty $V_j^A(a_i)$. Jeśli natura wybierze strategię n_1, wówczas najlepszą odpowiedzią A jest strategia $\hat{a}(n_1) = a_1$, dająca wartość wypłaty $\hat{V}_1^A = V_1^A(a_1) = 2$. Jeśli natura wybierze strategię n_2, wówczas najlepszą odpowiedzią A jest strategia $\hat{a}(n_2) = a_3$, dająca wartość wypłaty $\hat{V}_2^A = V_2^A(a_3) = 4$. Jeśli natura wybierze strategię n_3, wówczas najlepszą odpowiedzią A jest strategia $\hat{a}(n_3) = a_4$, dająca wartość wypłaty $\hat{V}_3^A = V_3^A(a_4) = 2$. Jeśli natura wybierze strategię n_4, wówczas najlepszą odpowiedzią A jest strategia $\hat{a}(n_4) = a_2$, dająca wartość wypłaty $\hat{V}_4^A = V_4^A(a_2) = 2$. Wektor wypłat $\hat{\mathbf{V}}^A$, związanych z najlepszymi odpowiedziami $\hat{a}(n_j)$ gracza A na strategie n_j natury przyjmuje postać $\hat{\mathbf{V}}^A = [\hat{V}_1^A, \hat{V}_2^A, \hat{V}_3^A, \hat{V}_4^A] = [2, 4, 2, 2]$. KD_{AN}^{Lap} liczymy jako wartość oczekiwaną wypłaty w sytuacji, gdy A zagra jako drugi:

$$KD_{AN}^{Lap} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} \hat{V}_j^A = 2.5 \tag{3.59}$$

Stąd oczekiwana korzyść z odwrócenia kolejności ruchów wyniesie:

$$VI_{AN}^{Lap} = |KD_{AN}^{Lap} - SQ_A^{Lap}| = 1. \tag{3.60}$$

Graczowi A opłaca się więc zabiegać o odwrócenie kolejności ruchów, jeśli oczekiwany koszt z tym związany nie przekroczy krytycznej wartości $VI_{AN}^{Lap} = 1$, oraz istnieje gwarancja, że zabiegi te zakończą się sukcesem.

□

3.9.3 Krytyczny koszt, a korzyść ze zmiany kolejności ruchów

W ostatnim zdaniu przykładu 3.6 stwierdziliśmy, iż graczowi A opłaca się zabiegać o zmianę kolejności ruchów, jeśli oczekiwany koszt z tym związany nie przekroczy krytycznej wartości $VI_{AH}^{Lap} = 1$ oraz istnieje gwarancja, że zabiegi te zakończą się sukcesem. Owa klauzula o gwarancji sukcesu ma znaczenie kluczowe dla rozróżnienia pomiędzy *korzyścią* ze zmiany kolejności ruchów, a *krytyczną wartością kosztu*, który warto jeszcze ponieść, aby o taką zmianę zabiegać. Dla przykładu, jeśli operator A ma pewność, że jego konkurent B nie ustali swoich cen na rynku detalicznym $\mathcal{B}$ przed zakończeniem negocjacji $\mathcal{H}$, to choćby z zamianą $\mathcal{HB} \Rightarrow \mathcal{BH}$ związana była dowolnie duża korzyść VI_{HB}^{X}, nie ma sensu ponosić najmniejszych kosztów, by o taką zamianę zabiegać.

Jeśli oznaczymy przez C_{AO}^{X} krytyczny koszt zmiany kolejności ruchów między graczami A i O, oraz przyjmiemy, że p_{AO} oznacza prawdopodobieństwo, iż gracz O ruszy się jako pierwszy, wówczas koszt krytyczny wyrazić możemy zależnością:

$$C_{AO}^{X} = p_{AO} \cdot VI_{AO}^{X} \tag{3.61}$$

Krytyczny koszt (3.61) ma szczególnie dobrą interpretację w przypadku, gdy gracz A w swoich wyborach kieruje się kryterium wartości oczekiwanej Laplace'a ($X = Lap$). Wartość oczekiwana korzyści jest wówczas pomniejszona proporcjonalnie do prawdopodobieństwa, że oczekiwana zmiana kolejności ruchów dojdzie do skutku. Próbę zmiany kolejności ruchów graczy podjąć warto wówczas, jeśli oczekiwana wartość kosztu z tą zamianą związana nie przekroczy tak pomniejszonej korzyści.

3.10 Siła negocjacyjna, a korzyść ze zmiany kolejności ruchów

3.10.1 Wpływ siły negocjacyjnej na wartość korzyści ze zmiany kolejności ruchów w grze przeciwko podwójnej naturze

Wartości liczbowe z przykładu 3.5 dobrane były w ten sposób, by korzystniej dla gracza A było poznać ustalone przez gracza B ceny na rynku detalicznym, niż wynegocjowane ceny na rynku hurtowym (dostęp do pętli lokalnej). W ogólności jednakże tak być nie musi. Wynika stąd stwierdzenie, iż przedstawiona w punkcie 3.7 hierarchia wariantów sekwencji ruchów, z punktu widzenia korzyści, wynikającej ze zmiany kolejności ruchów nie musi być optymalna. I tak dla przykładu wariant $\mathcal{HAB}$ może się okazać lepszy od wariantu $\mathcal{BAH}$ w tym sensie, iż korzyść z poznania wyniku negocjacji będzie dla operatora A większa aniżeli korzyść z poznania cen na rynku detalicznym operatora B ($VI_{AH}^{X} > VI_{AB}^{X}$).

Ocena korzyści z zamiany kolejności ruchów graczy, bazująca na analizie macierzy wypłat danego gracza opiera się na założeniu, iż wynik negocjacji modelowany jest przez hipotetycznego gracza H. Przy takim założeniu gubi się istotny fakt, że na wynik negocjacji wpływ ma nie tylko gracz B, ale też i gracz A i to nie tylko w sensie możliwości wyboru wysokości stawek rekomendowanych przez regulatora czy zawartych w ofercie ramowej (strategia h^*), lecz również w sensie wpływu na wybór innej strategii h_l. Analiza skierowana na obliczanie korzyści VI_{AH}^X właśnie takie założenie czyni. Jej skuteczność i przydatność w grach przeciwko podwójnej naturze maleje zatem wraz ze wzrostem siły negocjacyjnej gracza A i przy założeniu, że na wynik negocjacji wpływ ma wyłącznie gracz A, strategie hipotetycznego gracza H należałoby włączyć do strategii gracza A, nie zaś strategii natury.

W jaki sposób mierzyć korzyść VI_{AH}^X tak, by uwzględniała ona siłę negocjacyjną gracza A. Okazuje się, że na swój sposób jest to już realizowane poprzez dobór odpowiedniego kryterium wyboru strategii X (patrz dodatek A). I tak przyjęcie kryterium Walda (Savage'a, jeśli dąży się do minimalizacji straty) równoznaczne jest z przypuszczeniem, iż negocjacje zakończą się w sposób najmniej pomyślny dla gracza A. Jest to zatem odpowiednik sytuacji, gdy siła gracza A w negocjacjach jest minimalna. Zaś dla kryterium Optymistycznego zakłada się, iż negocjacje zakończą się w sposób najbardziej pomyślny dla gracza A. Jest to zatem odpowiednik sytuacji, gdy siła gracza A w negocjacjach jest maksymalna. Sytuacje pośrednie modelować można z wykorzystaniem kryterium Hurwicza (WES, jeśli dąży się do minimalizacji straty), gdzie współczynnik optymizmu α[30] odpowiadałby sile negocjacyjnej gracza A[31].

Z powyższego wysunąć można wniosek, iż dla porównywania korzyści, wynikających z zamian $\mathcal{AB} \Rightarrow \mathcal{BA}$ oraz $\mathcal{AH} \Rightarrow \mathcal{HA}$ wskazane może być jednoczesne stosowanie różnych kryteriów wyboru strategii X i Y (porównywanie VI_{AB}^X i VI_{AH}^Y). Odnosi się to również w ogólności do samego procesu wyboru strategii gry w sytuacji, gdy gracz A rusza się jako pierwszy (bez zamiany kolejności). Wskazane może być wówczas stosowanie różnych kryteriów do każdej z „części natury". I tak gracz A może się kierować jednym kryterium w stosunku do strategii, reprezentujących ceny na rynku detalicznym gracza B, a innym w stosunku do strategii hipotetycznego gracza H, reprezentujących możliwe wyniki negocjacji cen na rynku hurtowym $\mathcal{H}$. Dla przykładu, jeśli odnośnie strategii b_j gracz A stosował będzie kryterium Walda, zakładając pesymizm odnośnie

[30] Osobnym problemem, którym tu nie będziemy się zajmować jest kwestia pomiaru siły negocjacyjnej, który umożliwiałby wyrażenie tej siły w postaci współczynnika α.

[31] Podobną funkcję pełnić może również kryterium wartości oczekiwanej Laplace'a, zastosowane do macierzy wypłat gracza A przekształconej w ten sposób, że wartości wypłat w każdej kolumnie przemnożone są przez prawdopodobieństwo wybrania w trakcie negocjacji odpowiadającej jej strategii. Prawdopodobieństwo to byłoby wówczas odpowiednikiem lokalnie (w ograniczeniu do pojedynczej strategii) rozumianej siły negocjacyjnej gracza A.

wybranych cen na rynku detalicznym gracza B, zaś w stosunku do strategii hipotetycznego gracza H - h_l - kryterium Hurwicza (patrz punkt A.1.3 w dodatku A), wówczas odpowiednie zadanie optymalizacji przyjmie postać:

$$\max\{\alpha \cdot \max_l \min_j V^A_{jl}(a_i) + (1-\alpha) \cdot \min_l \min_j V^A_{jl}(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\} \tag{3.62}$$

Dobór kryterium wyboru strategii rozwiązuje problem siły negocjacyjnej tylko po części. Zauważmy, że wybór kryterium Walda wskazuje, iż gracz A przewiduje niepomyślny dla siebie wynik negocjacji, zaś wybór kryterium Optymistycznego - wynik pomyślny. Założenie, że przy małej sile negocjacyjnej gracza A otrzymane w wyniku negocjacji rozwiązanie będzie dla niego najmniej korzystne, zawiera w sobie ukryte założenie, iż partner w negocjacjach (gracz B) dążył będzie do minimalizacji jego wartości wypłaty czy to w sposób bezpośredni, czy też pośrednio poprzez maksymalizację wypłaty własnej. Jest to więc założenie albo o złośliwości gracza B, albo o wzajemnej sprzeczności interesów obu graczy. Choć i takie przypadki w praktyce występują, to niesłusznym jest twierdzenie, iż są one jedynymi. Ponadto, przypuszczenie złośliwości gracza B zakłada, iż zna on macierz wypłat gracza A[32]. Wniosek zaś o sprzeczności interesów zakładać musi, iż gracz A zna macierz wypłat gracza B[33]. Oba przypadki z punktu widzenia jednego z graczy nie są grami przeciwko naturze, lecz 2-osobowymi grami o sumie niezerowej z asymetryczną informacją na temat macierzy wypłat.

3.10.2 Wpływ siły negocjacyjnej na wartość korzyści ze zmiany kolejności ruchów w grze przeciwko pojedynczej naturze

Siła negocjacyjna graczy wpływa na rzeczywistą wartość korzyści wynikającej z zamian $\mathcal{AH} \Rightarrow \mathcal{HA}$ oraz $\mathcal{HB} \Rightarrow \mathcal{BH}$. Wartość korzyści wynikającej z zamiany $\mathcal{AB} \Rightarrow \mathcal{BA}$ w przypadku gry przeciwko pojedynczej naturze nie zależy od siły negocjacyjnej graczy[34].

Czy podobnie, jak to miało miejsce w grach przeciwko podwójnej naturze, siła negocjacyjna gracza A w grze przeciwko pojedynczej naturze uwzględniona zostaje poprzez odpowiedni dobór kryterium wyboru strategii X? Odpowiedź jest pozytywna w przypadku gry, gdzie strategiami gracza A są jego ceny na rynku detalicznym $\mathcal{A}$, zaś strategiami natury możliwe wyniki negocjacji stawek rozliczeniowych na rynku hurtowym $\mathcal{H}$[35]. W przypadku, gdy strategiami gracza A są możliwe wyniki negocjacji stawek rozliczeniowych na rynku hurtowym $\mathcal{H}$, zaś strategiami natury

[32] Tylko znając cel, jaki gracz A chce osiągnąć, gracz B może świadomie utrudniać jego realizację.

[33] By ocenić, jak decyzje gracza A wpłyną na wynik osiągnięty przez gracza B, trzeba znać funkcję wypłaty gracza B.

[34] Wynika to z faku, iż negocjacje już zostały zakończone, jako wynik gry przeciwko podwójnej naturze.

[35] Czyli sytuacja, kiedy w wyniku rozegrania gry przeciwko podwójnej naturze zostały ustalone ceny na rynku detalicznym gracza B.

możliwe wysokości cen $\mathcal{B}$ na rynku detalicznym gracza B[36], wybór kryterium X nie rozwiązuje problemu wpływu siły negocjacyjnej graczy na wartość zmiany kolejności ruchów. Wynika to z faktu, iż dobór kryterium wyboru strategii X odzwierciedla stosunek gracza A do niepewności związanej ze strategiami natury, która nie reprezentuje tu możliwych wyników negocjacji stawek na rynku hurtowym $\mathcal{H}$, tylko ceny na rynku detalicznym gracza B.

Do problemu wpływu siły negocjacyjnej na korzyść z zamiany $\mathcal{HB} \Rightarrow \mathcal{BH}$ w grze przeciwko pojedynczej naturze podejść można w sposób następujący. Jak to wyżej zasygnalizowano, w przypadku maksymalnej, dominującej siły negocjacyjnej gracza A, strategie hipotetycznego gracza H są pod całkowitą kontrolą gracza A. Sytuację tę można więc rozpatrywać w sposób identyczny, jak w przypadku zamiany $\mathcal{AB} \Rightarrow \mathcal{BA}$, kiedy to siła negocjacyjna graczy nie ma żadnego wpływu na wartość korzyści z zamiany kolejności ruchów.

W przypadku minimalnej siły negocjacyjnej gracza A, strategie hipotetycznego gracza H są pod całkowitą kontrolą gracza B. Z punktu widzenia gracza A sytuacja jest więc zdeterminowana i zamiana $\mathcal{HB} \Rightarrow \mathcal{BH}$ nie przyniesie mu żadnej korzyści ($VI^X_{HB} = 0$).

Przypadki pośrednie rozpatrywać można w ten sposób, iż wraz ze wzrostem siły negocjacyjnej gracza A poszerza się zbiór dostępnych dla niego strategi h_l i odwrotnie - wraz ze zmniejszaniem siły negocjacyjnej gracza A zbiór dostępnych dla niego strategii h_l redukuje się. Sposób wyznaczania wartości korzyści z zamiany kolejności ruchów w tego typu przypadkach ilustruje metoda, opisana w poniższych punktach.

1. *Określenie zbioru $\mathcal{I}_H$ potencjalnie możliwych do wybrania strategii h_l*

   Określamy (w sposób bezpośredni lub za pomocą odpowiednich zależności ograniczających) zbiór potencjalnie możliwych do wybrania strategii h_l przy założeniu, iż gracz A ma maksymalną siłę w negocjacjach - $\mathcal{I}_H$.

2. *Stworzenie rankingów strategii h_l*

   Zaczynamy od wyznaczenia (w oparciu o określone kryterium wyboru strategii X) wartości każdej ze strategii $h_l \in \mathcal{I}_H$ w sytuacji, gdy $\mathcal{H}$ poprzedza $\mathcal{B}$ - $SQ^X_{h_l}$. Następnie odwzorowujemy zbiór $\mathcal{I}_H$ w uporządkowany zbiór $\mathcal{I}^{SQ}_H = \{h'_1, \ldots, h'_l, \ldots, h'_L\}$ taki, że[37]:

$$SQ^X_{h'_l} \geqslant SQ^X_{h'_{l+1}}. \tag{3.63}$$

   Zbiór $\mathcal{I}^{SQ}_H$ stanowi ranking strategii h_l ze względu na ich wartość w sytuacji, gdy negocjacje są pierwszym ruchem w grze.

[36] Czyli sytuacja, kiedy w wyniku rozegrania gry przeciwko podwójnej naturze zostały ustalone ceny na rynku detalicznym gracza A.

[37] Uporządkowanie od największej do najmniejszej wartości strategii.

W kolejnym kroku określamy wartości każdej ze strategii h_l w sytuacji, gdy gracz B ruszył się jako pierwszy ($\mathcal{B}$) i wybrał strategię b_j:

$$KD_{h_l b_j} = V_j^A(h_l) : \forall j, l \tag{3.64}$$

Następnie dla każdej strategii b_j tworzymy uporządkowany zbiór $\mathcal{I}_H^{KDj} = \{h''_1, \ldots h''_l, \ldots h''_L\}$, będący odwzorowaniem zbioru $\mathcal{I}_H$ takim, że:

$$KD_{h''_l b_j} = V_j^A(h''_l) \geqslant V_j^A(h''_{l+1}) = KD_{h''_{l+1} b_j} \tag{3.65}$$

Zbiory $\mathcal{I}_H^{KDj}$ stanowią rankingi strategii h_l ze względu na wartość wypłaty, jaką gracz A otrzymuje wybierając strategię h_l w odpowiedzi na strategię b_j.

3. *Redukowanie liczności zbiorów $\mathcal{I}_H^{SQ}$ i $\mathcal{I}_H^{KDj}$ proporcjonalnie do siły negocjacyjnej α*
Ze zbioru $\mathcal{I}_H^{SQ}$ oraz ze zbiorów $\mathcal{I}_H^{KDj}$ odrzuca się $(1-\alpha)\cdot 100\%$ najlepszych strategii (strategii o największej wartości) otrzymując w ten sposób zredukowane zbiory $\mathcal{I}_{\alpha H}^{SQ}$ oraz $\mathcal{I}_{\alpha H}^{KDj}$.

4. *Wyznaczenie wartości $SQ_{\alpha H}^X$ i $KD_{\alpha HB}^X$ dla zredukowanych zbiorów $\mathcal{I}_{\alpha H}^{SQ}$ i $\mathcal{I}_{\alpha H}^{KDj}$*
$SQ_{\alpha H}^X$ jest najlepszą wartością, jaką w sensie kryterium X może sobie zapewnić gracz A przy założeniu, iż wyłącznie strategie ze zbioru $\mathcal{I}_{\alpha H}^{SQ}$ są dla niego całkowicie dostępne[38]. W sytuacji, gdy negocjacje $\mathcal{H}$ poprzedzać mają $\mathcal{B}$, gracz A wybierze spośród strategii należących do $\mathcal{I}_{\alpha H}^{SQ}$ tę, która w sensie kryterium X da mu największą wypłatę. Stąd:

$$SQ_{\alpha H}^X = \max_{l \in \mathcal{I}_{\alpha H}^{SQ}} SQ_{h_l}^X \tag{3.66}$$

$KD_{h_l b_j}$ oznacza wartość wypłaty, jaką otrzymuje gracz A w przypadku, gdy w odpowiedzi na strategię b_j gracza B w wyniku negocjacji wybrana zostaje strategia h_l. Dla każdej możliwej strategii b_j gracz A dąży do wybrania takiej strategii h_l, która da mu największą spośród wypłat $KD_{h_l b_j}$. Z racji na ograniczoną siłę w negocjacjach dostępne są dla niego jednak wyłącznie strategie ze zredukowanego zbioru $\mathcal{I}_{\alpha H}^{KDj}$. Zatem dla każdej strategii b_j gracz A dążył będzie do wybrania takiej strategii $\hat{h}(b_j)$, która spełnia zależność:

$$\hat{h}(b_j) = \arg \max_{l \in \mathcal{I}_{\alpha H}^{KDj}} KD_{h_l b_j} : \forall j \tag{3.67}$$

[38] Bazujemy tu na założeniu, iż posiadana siła negocjacyjna zapewnia, że strategie ze zbioru $\mathcal{I}_{\alpha H}^{SQ}$ są pod całkowitą i wyłączną kontrolą gracza A. Któraś z nich może być zawsze w trakcie negocjacji wybrana (jest to założenie niewątpliwie silne).

Oznaczmy przez $KD_{\hat{h}b_j}$ wartość wypłaty, jaką otrzymuje gracz A w sytuacji, gdy w odpowiedzi na strategię b_j wybiera strategię $\hat{h}(b_j)$. Wartość tę wyznaczamy ze wzoru:

$$KD_{\hat{h}b_j} = V_j^A(\hat{h}(b_j)) = \max_{l \in \mathcal{I}_{\alpha H}^{KDj}} KD_{h_l b_j} : \forall j \tag{3.68}$$

Dla potrzeb wyznaczania korzyści ze zmiany kolejności ruchów w grze obliczymy współczynnik $KD_{\alpha HB}^X$, który określa zaagregowaną (agregacja po strategiach b_j) w oparciu o kryterium X wartość wypłaty, jaką w sensie tego kryterium gracz A może sobie zapewnić, kierując się zasadą wyboru strategii $\hat{h}(b_j)$. I tak dla przykładu dla kryterium Walda:

$$KD_{\alpha HB}^X = \min_j KD_{\hat{h}b_j}, \tag{3.69}$$

dla kryterium Laplace'a:

$$KD_{\alpha HB}^X = \sum_j KD_{\hat{h}b_j} \tag{3.70}$$

itd.

5. *Wyznaczenie wartości korzyści ze zmiany kolejności ruchów* $VI_{\alpha HB}^X$
Wartość korzyści ze zmiany kolejności ruchów $VI_{\alpha HB}^X$ obliczymy z zależności:

$$VI_{\alpha HB}^X = |KD_{\alpha HB}^X - SQ_{\alpha H}^X|. \tag{3.71}$$

Zastosowanie powyższej metody do wyznaczenia wartości korzyści ze zmiany kolejności ruchów w grze przeciwko pojedynczej naturze, przy sile negocjacyjnej gracza A równej α zilustrujemy na przykładzie.

Przykład 3.7

Rozpatrujemy przypadek dwóch graczy - operatorów A i B. W wyniku rozegrania gry przeciwko podwójnej naturze ustalone zostały ceny na rynku detalicznym gracza A. W fazie gry przeciwko pojedynczej naturze gracz A rozważa, czy przystąpić do negocjacji cen na rynku hurtowym $\mathcal{H}$, zanim gracz B ustali swoje ceny na rynku detalicznym $\mathcal{B}$, czy też poczekać z rozpoczęciem negocjacji do momentu, aż gracz B ceny detaliczne ustali. Macierz wypłat gracza A zilustrowano w tabeli 3.18.

Gracz A ocenia, iż siła negocjacyjna obu graczy jest względnie równa ($\alpha = 0.5$). Ponad to gracz A zakłada, iż B ustali swoje ceny na rynku detalicznym w sposób niekorzystny dla A. W swoich decyzjach gracz A kieruje się więc kryterium Walda:

$$\max\{\min_j V_j(h_l) : l \in \mathcal{I}_H\}. \tag{3.72}$$

Pytamy o korzyść $VI_{\alpha HB}^{Wal}$ z zamiany $\mathcal{HB} \Rightarrow \mathcal{BH}$ przy uwzględnieniu siły negocjacyjnej α.

Tabela 3.18: Macierz wypłat gracza A w grze przeciwko pojedynczej naturze, w której jego strategiami są możliwe wyniki negocjacji cen na rynku hurtowym.

	b_1	b_2	b_3	b_4
h_1	2	2	0	1
h_2	1	1	1	2
h_3	0	4	0	1
h_4	1	3	2	0

1. *Określenie zbioru $\mathcal{I}_H$ potencjalnie możliwych do wybrania strategii h_l*

Zbiór potencjalnie możliwych do wybrania strategii składa się z czterech elementów i przybiera postać:

$$\mathcal{I}_H = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}.$$

2. *Stworzenie rankingów strategii h_l*

Dla każdej strategii h_l określamy jej wartość w sensie kryterium Walda przy założeniu, że negocjacje stanowią pierwszy ruch w grze:

$$SQ_{h_l}^{Wal} = \min_j V_j^A(h_l) : \forall l. \tag{3.73}$$

Są to najmniejsze wartości w każdym wierszu tabeli 3.18. Stąd:

$$SQ_{h_1}^{Wal} = 0,$$

$$SQ_{h_2}^{Wal} = 1,$$

$$SQ_{h_3}^{Wal} = 0,$$

$$SQ_{h_4}^{Wal} = 0.$$

Szeregując strategie h_l względem wartości $SQ_{h_l}^{Wal}$ od największej do najmniejszej otrzymujemy uporządkowany zbiór (ranking):

$$\mathcal{I}_H^{SQ} = \{h_2, h_1, h_3, h_4\}.$$

Wyznaczamy następnie rankingi $\mathcal{I}_H^{KDj}$ strategii h_l, spełniające równanie (3.65) przy założeniu, że jako pierwszy ruszył się gracz B ustalając swoje ceny na rynku detalicznym $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{I}_H^{KD1} = \{h_1, h_2, h_4, h_3\}$$

$$\mathcal{I}_H^{KD2} = \{h_3, h_4, h_1, h_2\}$$

$$\mathcal{I}_H^{KD3} = \{h_4, h_2, h_1, h_3\}$$

$$\mathcal{I}_H^{KD4} = \{h_2, h_1, h_3, h_4\}$$

3. *Redukowanie liczności zbiorów $\mathcal{I}_H^{SQ}$ i $\mathcal{I}_H^{KDj}$ proporcjonalnie do siły negocjacyjnej α*

W przykładzie przyjęto, iż $\alpha = 0.5$. Gracz A może wobec tego zakładać, iż spośród potencjalnie dostępnych czterech strategii $h_l \in \mathcal{I}_H$, osiągalne w trakcie negocjacji będą tylko dwie[39] (najgorsze w ramach każdego z rankingów). Po redukcji zbiorów $\mathcal{I}_H^{SQ}$ i $\mathcal{I}_H^{KDj}$ otrzymamy:

$$\mathcal{I}_{\alpha H}^{SQ} = \{h_3, h_4\}$$

$$\mathcal{I}_{\alpha H}^{KD1} = \{h_4, h_3\}$$

$$\mathcal{I}_{\alpha H}^{KD2} = \{h_1, h_2\}$$

$$\mathcal{I}_{\alpha H}^{KD3} = \{h_1, h_3\}$$

$$\mathcal{I}_{\alpha H}^{KD4} = \{h_3, h_4\}$$

4. *Wyznaczenie wartości $SQ_{\alpha H}^X$ i $KD_{\alpha HB}^X$ dla zredukowanych zbiorów $\mathcal{I}_{\alpha H}^{SQ}$ i $\mathcal{I}_{\alpha H}^{KDj}$*

Grając jako pierwszy (rozpoczynając grę od negocjacji) gracz A dążył będzie do wybrania tej spośród dostępnych (po uwzględnieniu siły negocjacyjnej) dla niego strategii $h_l \in \mathcal{I}_{\alpha H}^{SQ}$, która zapewni mu największą wartość wypłaty. W naszym przykładzie jest to strategia h_3. Stąd:

$$SQ_{\alpha H}^{Wal} = \max_{l \in \mathcal{I}_{\alpha H}^{SQ}} SQ_{h_l}^{Wal} = SQ_{h_3}^{Wal} = 0. \tag{3.74}$$

Grając jako drugi, dla każdej ustalonej już strategii b_j gracz A dążył będzie do wybrania takiej dostępnej strategii $\hat{h}(b_j) \in \mathcal{I}_{\alpha H}^{KDj}$, która da mu największą wartość wypłaty. Stąd:

$$\hat{h}(b_1) = h_4,$$

$$\hat{h}(b_2) = h_1,$$

$$\hat{h}(b_3) = h_1,$$

$$\hat{h}(b_4) = h_3.$$

Odpowiednie wartości wypłat, jakie w ten sposób gracz A może sobie zapewnić wynoszą:

$$KD_{\hat{h}b_1} = V_1^A(h_4) = 1,$$

[39] $4 - (1 - 0.5) \cdot 4 = 2$.

$$KD_{\hat{h}b_2} = V_2^A(h_1) = 2,$$

$$KD_{\hat{h}b_3} = V_3^A(h_1) = 0,$$

$$KD_{\hat{h}b_4} = V_4^A(h_3) = 1.$$

Z racji na założony pesymizm odnośnie strategii gracza B otrzymujemy:

$$KD_{\alpha HB}^{Wal} = \min_j KD_{\hat{h}b_j} = KD_{\hat{h}b_3} = V_3^A(h_1) = 0.$$

5. *Wyznaczenie wartości korzyści ze zmiany kolejności* $VI_{\alpha HB}^X$

Wobec powyższego otrzymujemy

$$VI_{\alpha HB}^X = |KD_{\alpha HB}^X - SQ_{\alpha H}^X| = 0.$$

Widać więc, iż dla określonych warunków zadania w rozpatrywanym przykładzie (siła negocjacyjna $\alpha = 0.5$), gracz A nie odnosi żadnej korzyści (w sensie kryterium Walda) ze zmiany kolejności ruchów. Łatwo zauważyć, iż sytuacja ta zmieni się, jeśli tylko $\alpha \geqslant 0.75$. W takim przypadku, w trakcie redukcji (punkt 3 metody) odrzucona zostanie z każdego zbioru tylko jedna strategia. Krytycznym rankingiem dla przypadku siły negocjacyjnej na poziomie $\alpha = 0.5$ był ranking $\mathcal{I}_{\alpha H}^{KD3}$, z najlepszą strategią $\hat{h}(b_3) = h_1$, dla której $KD_{\hat{h}b_3} = V_3(h_1)^A = 0$. W przypadku, gdy $\alpha \geqslant 0.75$ ranking $\mathcal{I}_{\alpha H}^{KD3}$ składał będzie się z trzech strategii, z najlepszą strategią h_2, dla której $KD_{\hat{h}b_3} = V_3^A(h_2) = 1$. W tym przypadku zmiana kolejności ruchów poprawi wypłatę gracza A (w sensie kryterium Walda) o 1.

□

Z kwestią wpływu siły negocjacyjnej na wartość zamiany $\mathcal{HB} \Rightarrow \mathcal{BH}$ wiąże się jeszcze jeden problem, o którym dotychczas nie było mowy. Problem ten wynika z faktu, iż w zależności od tego, kiedy odbywają się negocjacje (przed czy po ustaleniu cen na rynku detalicznym gracza B), wartość poszczególnych strategii h_l jest różnie postrzegana przez gracza B i pewne strategie, które byłby on w stanie zaakceptować w negocjacjach odbywających się przed procesem $\mathcal{B}$, w negocjacjach odbywających się po $\mathcal{B}$ mogą być już nie do zaakceptowania[40]. Problemu tego jednakże w sytuacji nieznajomości macierzy wypłat gracza B rozwiązać się nie da.

[40] W przypadku, gdy negocjacje stawek rozliczeniowych $\mathcal{H}$ odbywają się przed ustaleniem cen na rynku detalicznym gracza B, gracz ten skłonny będzie akceptować pewne strategie h_l', jeśli istnieć będą takie strategie b_j na jego rynku detalicznym, którymi poprawić będzie mógł wartość wypłaty, względem strategii h^*. W sytuacji, gdy została już wybrana określona strategia b_j zanim rozpoczęły się negocjacje $\mathcal{H}$, strategie h_l' mogą się okazać gorsze niż h^* i w przypadku niemożności poprawy wyniku dodatkowym ruchem w grze gracz B je odrzuci.

3.10.3 Źródła siły negocjacyjnej

Źródło siły negocjacyjnej jest wielowymiarowe. Chyba najbardziej ogólna klasyfikacja wyłania źródła subiektywne, związane z umiejętnościami[41] i reputacją[42] osób negocjujących oraz źródła obiektywne, związane z kontekstem i merytoryczną stroną negocjowanego zagadnienia. Najważniejszym źródłem obiektywnej siły strony w negocjacjach jest wartość najlepszej alternatywy względem negocjowanego porozumienia, tzw. BATNA (*Best Alternative To a Negotiated Agreement*) [51, 176, 178]. BATNA danego gracza jest wartością wypłaty, jaką może on sobie zapewnić w sytuacji, gdy negocjacje zakończą się fiaskiem. BATNA obu graczy wyznacza dopuszczalny zbiór negocjacyjny[43] [151, 182, 181]. Gracze zaakceptują tylko takie rozwiązania, które są niegorsze niż ich BATNA.

W przypadku negocjacji stawek rozliczeniowych, BATNA określone jest arbitrażową decyzją regulatora. Jednakże w sytuacji nieznajomości macierzy wypłat (funkcji wypłaty) gracza B, mimo znajomości wysokości stawek rozliczeniowch, jakie narzuci regulator, gracz A nie jest w stanie określić wartości BATNA gracza B[44]. Jest to istotne ograniczenie sytuacji o modelu gry przeciwko naturze.

3.11 Podsumowanie

Gra przeciwko naturze stanowi adekwatny model sytuacji growej na rynku telekomunikacyjnym w sytuacji nieznajomości macierzy wypłat graczy konkurencyjnych, oraz w przypadku rozważania wyłącznie jednego kryterium oceny podjętych decyzji i konieczności podejmowania decyzji jako pierwszy. Dla rozważanych w niniejszej pracy gier, nieznajomość macierzy wypłat tożsama jest z nieznajomością modelu kosztów operatorów konkurencyjnych i/lub strategicznych celów ich działania. Aby zracjonalizować proces podejmowania decyzji odnośnie wyboru strategii gry (wysokości cen za poszczególne jednostki usługowe), operatorzy stosować mogą różne kryteria,

[41] Wymienić tu należy choćby takie elementy, jak: znajomość stylów i technik negocjacyjnych, znajomość osobowości ludzkiej, umiejętność radzenia sobie z emocjami, umiejętność sprawnego komunikowania się (aktywne słuchanie, asertywna wypowiedź), umiejętność zarządzania dynamiką konfliktu, prawidłową percepcję problemu, umiejętność precyzyjnego zdefiniowania celów każdej ze stron, umiejętność zbudowania i utrzymania spójnego i kreatywnego zespołu negocjacyjnego, pomysłowość w tworzeniu opcji rozwiązania, szacunek dla negocjatorów strony przeciwnej i wreszcie dobre merytoryczne przygotowanie [10, 68, 116, 176, 196].

[42] „Dobra reputacja człowieka zawsze postępującego fair może być nieocenionym atutem (w negocjacjach). Otwiera bowiem ogromne możliwości osiągania twórczych porozumień, które są nierealne, gdy druga strona ci nie wierzy. Taką reputację znacznie łatwiej jest zniszczyć niż zbudować." ([51] str. 208).

[43] W szczególności, zbiór ten może być pusty, jeśli nie istnieje rozwiązanie lepsze niż BATNA obu stron.

[44] Ceny są jedynie decyzją. Nieznajomość funkcji wypłaty uniemożliwia określenie *wartości* tej decyzji, czyli BATNA.

odzwierciedlające ich subiektywne preferencje i przewidywania. W razie zaistniałej niejednoznaczności dokonać można regularyzacji w oparciu o inne użyteczne kryterium. Decyzje opierać można jednocześnie na wielu kryteriach wyboru strategii, a dobrą metodą analizy sytuacji decyzyjnej jest Metoda Punktu Odniesienia. W celu zminimalizowania liczby możliwych strategii gry natury, reprezentującej konkurencyjnych graczy, użytecznym może się okazać poznanie decyzji któregoś z graczy, a jako kryterium wskazania operatora, którego decyzję najbardziej warto poznać, zastosować można kryterium liczby dopuszczalnych strategii lub kryterium wartości informacji (koncepcja Operatora Najbardziej Obiecującego). Kryterium wartości informacji VI_{AO}^{X} stanowić może również wskaźnik poziomu zachęty do wejścia operatora A w jakąś formę koalicji z operatorem O. Wskaźnik ten stanowić może również cenne narzędzie dla regulatora rynku, wspierające proces monitorowania i kontroli zachowań antykonkurencyjnych. Z punktu widzenia sprawności przeprowadzania procesu negocjacji odnośnie stawek rozliczeniowych na rynku hurtowym, najbardziej optymalnym jest wariant, w którym gracze przystępują do negocjacji mając już obustronnie ustalone ceny na rynku detalicznym. W oparciu o analizę własnej macierzy wypłat gracze mogą oszacowywać wartość korzyści ze zmiany kolejności ruchów w grze, uwzględniając przy tym istnienie stawek rekomendowanych przez regulatora rynku, bądź przedstawianych w ofercie ramowej, jak również różną siłę negocjacyjną każdej ze stron.

Rozdział 4

Zarys analizy gier N-osobowych i wielokryterialnych

4.1 Wyzwanie

Analizowany w poprzednim rozdziale model jednokryterialnej gry przeciwko naturze obejmuje swoim zasięgiem jedynie drobny i w istocie najprostszy z punktu widzenia analizy fragment rzeczywistości konkurencji na rynku telekomunikacyjnym, kiedy to dany gracz A, z racji na nieznajomość macierzy wypłat (w szczególności modeli kosztów) pozostałych graczy, traktuje ich wszystkich jako jedną - choć nie pojedynczą (patrz punkt 3.9) - naturę. Co więcej, w swych decyzjach kieruje się on tylko jednym kryterium oceny (np. zyskiem). Modelowana rzeczywistość komplikuje się w radykalny sposób wówczas, gdy gracze rozpatrują wiele kryteriów oceny, a - choćby nawet tylko częściowa - informacja o macierzy wypłat konkurentów każe sytuację rozpatrywać już nie jako grę przeciwko naturze, lecz N-osobową grę o sumie niezerowej. Paradoksalnie poszerzanie obszaru wiedzy na temat sytuacji graczy konkurencyjnych, pozwalając z jednej strony grać mądrzej, utrudnia z drugiej w sposób zdecydowany samą analizę sytuacji. Pokusa upraszczania problemu i, poprzez ignorowanie informacji, sprowadzania go do prostego modelu gry przeciwko naturze, może być w tej sytuacji znaczna, jednakże koszt takiej ignorancji bywa ze wszech miar istotny (patrz Dodatek D).

Niniejsza praca stanowi jedynie początek zmagań z owym wyzwaniem, jakim jest gra na konkurencyjnym rynku telekomunikacyjnym. Dalsze analizy mierzyć się będą musiały z przypadkami:

- jednokryterialnych 2-osobowych gier o sumie niezerowej
- jednokryterialnych N-osobowych gier o sumie niezerowej

- wielokryterialnych gier przeciwko naturze
- wielokryterialnych 2-osobowych gier o sumie niezerowej
- wielokryterialnych N-osobowych gier o sumie niezerowej

Każdy z przypadków wniesie zapewne elementy niepowtarzalne, swoiste wyjątki, które uwzględniać trzeba będzie podczas analizy każdego ze szczegółowych zagadnień, o których mowa była w rozdziale poprzednim. Nie wykluczone, iż pojawią się również i zagadnienia nowe[1].

Jako swoiste preludium do tego typu analiz, którym na swój czas przyjdzie jeszcze trochę poczekać, przedstawimy w tym rozdziale kilka zagadnień dotyczących wspomagania decyzji gracza w sytuacji modelowanej przez jednokryterialną 2-osobową grę o sumie niezerowej.

4.2 Preludium do analizy jednokryterialnych 2-osobowych gier o sumie niezerowej

Model 2-osobowej jednokryterialnej gry o sumie niezerowej stanowi dobre narzędzie opisu sytuacji decyzyjnej dwóch konkurujących ze sobą graczy rynkowych, przy założeniu, iż znają oni nawzajem swoje macierze wypłat. Zgodnie z rozważaniami, przeprowadzonymi w rozdziale 2, znajomość macierzy wypłat graczy konkurencyjnych w wyróżnionych grach na rynku telekomunikacyjnym oznacza w praktyce znajomość modelu popytu, znajomość modelu kosztów świadczenia usług we własnej sieci, jak również w sieci konkurenta, oraz znajomość zbioru potencjalnych strategii gry (zbiór jednostek usługowych i odpowiadających im dopuszczalnych poziomów cen).

Rozpatrywanie tego przypadku niesie z sobą dużo cennych spostrzeżeń teoretycznych, stanowiących bazę do rozważań nad pozostałymi modelami gier. Jest to jednak również przypadek odzwierciedlający realne sytuacje rynkowe. Dotyczy to w szczególności rynków lokalnych, gdzie w wielu miejscach realnie i względnie sprawnie funkcjonują jedynie dwa podmioty - dawny monopolista i nowy niezależny operator lokalny (NOL).

Rozpatrzmy sytuację wyboru strategii cenowej na detalicznych rynkach obu graczy A i B. Przyjmiemy punkt widzenia gracza A.

Z perspektywy czasu wybierania strategii gry (ustalania cen za poszczególne jednostki usługowe) zajść mogą następujące trzy przypadki:

1. A podejmuje swoje decyzje jako pierwszy.

[1] Dla przykładu w jednokryterialnej 2-osobowej grze o sumie niezerowej pojawia się zagadnienie korzyści z uprzedzania decyzji konkurenta (*an advengate of the first mover*), którego w grze przeciwko naturze nie było, bowiem zawsze conajmniej nie gorzej było tam grać jako drugi.

2. Obaj gracze A i B podejmują decyzje względnie równocześnie.

3. A podejmuje swoje decyzje jako drugi.

Sytuacja trzecia, kiedy to gracz A podejmuje swoje decyzje jako drugi, jest z jego punktu widzenia prosta. Gracz dokonuje wyboru strategii gry poprzez optymalizację własnej funkcji wypłaty, z uwzględnieniem wybranej przez gracza B strategii, traktowanej jako zbiór parametrów (zbiór cen za poszczególne jednostki usługowe świadczone przez przedsiębiorstwo B)[2].

Sytuacja pierwsza i druga są już trudniejsze. W rozdziale tym rozwiniemy nieco przypadek pierwszy, kiedy to gracz A wybiera swoją strategię jako pierwszy.

4.2.1 Wybór strategii gry w sytuacji konieczności podjęcia decyzji jako pierwszy

W punkcie 2.3.4 rozdziału 2 zasygnalizowaliśmy, iż kryteria oceny decyzji graczy (funkcje wypłaty) mogą być tak zarówno maksymalizowane, minimalizowane, jak i stabilizowane. Maksymalizacja, minimalizacja i stabilizacja wyznaczają swoisty „kierunek optymalizacji kryterium", który nazwiemy *charakterem kryterium*. Gracz A może lecz nie musi wiedzieć *a priori* jaki charakter ma dane kryterium dla gracza B. Innymi słowy znajomość macierzy wypłat gracza B, a co za tym idzie znajomość jego funkcji wypłaty nie wystarcza do precyzyjnego określenia celu, jaki on sobie wyznacza. Nie wystarczy zatem wiedzieć, iż B np. „gra o zysk", trzeba jeszcze wiedzieć, czy ów zysk gracz B chce maksymalizować. Mamy tu zatem dwa przypadki:

1. Gracz A wie, jaki charakter ma kryterium gracza B.

2. Gracz A nie wie, jaki charakter ma kryterium gracza B.

W przypadku pierwszym problem jest prosty, jeśli kryterium gracza B jest maksymalizowane, lub minimalizowane. W przypadku stabilizacji kryterium problem jest o tyle skomplikowany, że gracz A nie musi wiedzieć, wokół jakiej wartości dokonuje się ta stabilizacja. Z punktu widzenia analizy tego typu gier dogodnie jest zatem dokonać innego podziału sytuacji decyzyjnej:

1. Gracz A wie, jaki charakter ma kryterium gracza B i jest to kryterium maksymalizowane, minimalizowane albo stabilizowane ze znaną dla A wartością, wokół której dokonuje się stabilizacja.

2. Gracz A nie wie, jaki ma charakter kryterium gracza B, bądź wie i jest to kryterium stabilizowane, z tym, że A nie wie, wokół jakiej wartości.

[2] W tego typu przypadkach znajomość macierzy wypłat konkurenta nie ma żadnego znaczenia, bowiem znana jest już sama strategia przez niego wybrana. Owo znaczenie nabrać może wagi w kolejnych iteracjach gry rynkowej, kiedy to już gracz B może nie wybierać swojej strategii jako pierwszy.

Przypadki powyższe określimy odpowiednio jako sytuację, kiedy jest *znany charakter kryterium konkurenta* i sytuację kiedy jest *nieznany charakter kryterium konkurenta*.

Poniżej ilustrujemy racjonalne sposoby rozgrywania tego typu gier przez gracza A w obu sytuacjach.

Znany charakter kryterium konkurenta

W sytuacji, gdy gracz A zna charakter kryterium[3] (funkcji wypłaty) gracza konkurencyjnego - B, możliwym jest wyznaczenie dla każdej potencjalnie wybranej przez A strategii a_i najlepszej z punktu widzenia gracza B odpowiedzi $\hat{b}(a_i)$. I tak dla kryteriów $V_i^B(b_j)$ maksymalizowanych otrzymamy:

$$\hat{b}(a_i) = \arg\max_j V_i^B(b_j) : \forall i, \tag{4.1}$$

dla kryteriów minimalizowanych

$$\hat{b}(a_i) = \arg\min_j V_i^B(b_j) : \forall i, \tag{4.2}$$

zaś dla kryteriów stabilizowanych

$$\hat{b}(a_i) = \arg\max_j \frac{1}{|\hat{V}^B - V_i^B(b_j)| + 1} : \forall i, \tag{4.3}$$

gdzie $\hat{V}^B$ jest pożądaną przez gracza B wartością jego funkcji wypłaty $V_i^B(b_j)$.

Oznaczmy indeks strategii $\hat{b}(a_i)$ przez $\hat{j}$. Wartość wypłaty gracza A w sytuacji, gdy wybrał on swoją strategię a_i, zaś gracz B w odpowiedzi wybrał najlepszą dla siebie strategię $\hat{b}(a_i)$, oznaczymy przez $V_{\hat{j}}^A(a_i)$ Zakładając, że kryterium gracza A jest maksymalizowane lub sprowadzone do takiej postaci[4], najlepszą strategię gry - $\hat{a}$ gracz A otrzymuje w wyniku rozwiązania poniższego zadania optymalizacji:

$$\hat{a} = \arg\max_i V_{\hat{j}}^A(a_i). \tag{4.4}$$

Przykład 4.1

Po liberalizacji rynku połączeń międzynarodowych, dawny monopolista - operator A spodziewa się w najbliższym czasie wejścia na rynek nowego operatora B. Operator A rozważa możliwość zmiany struktury taryfowej za połączenia międzynarodowe jeszcze zanim operator B zacznie faktycznie funkcjonować tak, aby w etapie przejściowym zatrzymać możliwie największą liczbę klientów (gra o liczbę użytkowników). Operator A rozważa cztery strategie gry:

[3] I rzecz jasna zna analityczną postać tego kryterium, co jest tu domniemywane.

[4] Patrz punkt 2.3.4 w rozdziale 2.

a_1 - zachować aktualną strukturę taryfową.

a_2 - obniżyć o 5% ceny połączeń międzynarodowych.

a_3 - obniżyć o 10% ceny połączeń międzynarodowych.

a_4 - obniżyć o 15% ceny połączeń międzynarodowych.

Budowa infrastruktury sieciowej zmusiła operatora B do poniesienia znacznych nakładów finansowych i zaciągnięcia dużych kredytów. Operator A przewiduje, że z tego powodu podstawowym celem najbliższej działalności operatora B będzie szybki zwrot poniesionych kosztów i spłata zaciągniętych kredytów (gra o zysk - maksymalizacja zysku).

Operator A dobrze zna technologię wykorzystaną do budowy sieci przez operatora B, a względnie mała liczba punktów połączeniowych z operatorami sieci lokalnych oraz niewielka liczba łączy wychodzących do sieci krajów sąsiadujących pozwala operatorowi A dość dobrze określić strukturę kosztów operatora B.

Operator A przypuszcza, że operator B rozważał będzie cztery strategie cenowe:

b_1 - zachować aktualną strukturę taryfową operatora A.

b_2 - obniżyć o 5% ceny połączeń międzynarodowych względem aktualnych cen operatora A.

b_3 - obniżyć o 10% ceny połączeń międzynarodowych względem aktualnych cen operatora A.

b_4 - obniżyć o 15% ceny połączeń międzynarodowych względem aktualnych cen operatora A.

W oparciu o model popytu oraz model kosztów sieci operatora B, operator A przeprowadził obliczenia dla każdej kombinacji dopuszczalnych strategii gry obu graczy, wyznaczając odpowiednio liczby użytkowników operatora A (w setkach tysięcy) oraz szacowaną wielkość zysku operatora B (w milionach złotych). Macierze wypłat operatorów A i B zilustrowano w tabeli 4.1.

Tabela 4.1: Macierz wypłat operatorów A i B.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[6,6]	[5,8]	[4,7]	[7,5]
a_2	[8,5]	[4,4]	[3,5]	[5,6]
a_3	[7,4]	[6,3]	[3,3]	[6,6]
a_4	[5,6]	[6,5]	[6,6]	[7,7]

Aby wskazać najlepszą własną strategię gry, operator A określa dla każdej strategii a_i, najlepszą z punktu widzenia operatora B odpowiedź - $\hat{b}(a_i)$ (strategię b_j dającą największą wartość wypłaty $V_i^B(b_j)$). Na tej podstawie dla każdej strategii a_i operator A określa wartość wypłaty, jaką otrzyma - $V_{\hat{j}}^A(a_i)$ i wybiera strategię, która tę wypłatę maksymalizuje.

W tabeli 4.2 dokonano zestawienia odpowiednich wartości dla poszczególnych strategii a_i. Którą strategię powinien wybrać operator A? Zgodnie z zależnością (4.4) tę, która daje największą wartość wypłaty $V_{\hat{j}}^A(a_i)$. Największą wypłatę $V_4^A(a_4) = 7$ zapewnia operatoratorowi A strategia a_4. Ona zatem powinna zostać wybrana. □

Tabela 4.2: Zestawienie najlepszej z punktu widzenia gracza B odpowiedzi oraz wartości wypłat obu graczy dla każdej strategii gracza A.

	$\hat{b}(a_i)$	$V_i^B(\hat{b}(a_i))$	$V_{\hat{j}}^A(a_i)$
a_1	b_2	8	5
a_2	b_4	6	5
a_3	b_4	6	6
a_4	b_4	7	7

Nieznany charakter kryterium konkurenta

Sytuacja nieznajomości charakteru kryterium konkurenta zdefiniowana została jako zajście jednego z dwóch przypadków:

- gracz A nie wie, jaki ma charakter kryterium gracza B,
- gracza A wie, jaki charakter ma kryterium gracza B i jest to kryterium stabilizowane, z tym, że A nie wie wokół jakiej wartości.

Oba przypadki sprowadzić można do wspólnej, ogólnej postaci zakładając, iż kryterium gracza B jest stabilizowane wokół wartości nieznanej graczowi A. Wynika to z faktu, iż kryteria maksymalizowane traktować można jako kryteria stabilizowane względem największej z możliwych wartości, zaś kryteria minimalizowane względem wartości najmniejszej[5]. Wspomaganie gracza A w wyborze najkorzystniejszej strategii w tym przypadku oprzeć można na metodzie opisanej w poniższych punktach.

[5] Owe wartości największe i najmniejsze nie muszą należeć do zbioru osiągalnych wartości funkcji wypłaty gracza B.

1. Określamy zbiór możliwych wartości stabilizowanych (np. zbiór wszystkich wartości liczbowych z macierzy wypłat).

2. Tworzymy nową macierz wypłat gracza A, w której strategiami gracza B będą wyżej opisane, możliwe wartości stabilizowane, zaś elementami macierzy - wartości wypłat $V_j^A(a_i)$ gracza A, jakie otrzyma w sytuacji, gdy w odpowiedzi na jego strategię a_i gracz B wybiera strategię b_j, dla której wartość $V_i^B(b_j)$ jest najbliższa względem aktualnie rozpatrywanej wartości stabilizowanej.

3. Otrzymaną macierz traktujemy jako model gry przeciwko naturze i do jej analizy stosujemy metody z rodziału 3.

4.2.2 Niejednoznaczność odpowiedzi konkurenta

Rozważmy przypadek dwóch graczy A i B, mających po 4 strategie gry. Ich macierze wypłat zilustrowano w tabeli 4.3. Rozpatrujemy problem z punktu widzenia gracza A. Aby wskazać naj-

Tabela 4.3: Macierz wypłat graczy A i B. Problem niejednoznaczności odpowiedzi gracza B.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[6,6]	[5,8]	[4,7]	[7,5]
a_2	[8,5]	[4,4]	[3,6]	[5,6]
a_3	[7,4]	[6,3]	[3,3]	[6,6]
a_4	[5,7]	[6,5]	[6,6]	[7,7]

lepszą własną strategię gry, gracz A określa dla każdej strategii a_i, najlepszą z punktu widzenia gracza B odpowiedź - $\hat{b}(a_i)$ (strategię b_j, dającą największą wartość wypłaty $V_i^B(b_j)$). Na tej podstawie dla każdej strategii a_i gracz A określa wartość wypłaty, jaką otrzyma - $V_{\hat{j}}^A(a_i)$ i wybiera strategię, która tę wypłatę maksymalizuje.

W tabeli 4.4 dokonano zestawienia odpowiednich wartości dla poszczególnych strategii a_i. Którą strategię powinien wybrać gracz A? Zgodnie z zależnością (4.4) tę, która daje największą wartość wypłaty $V_{\hat{j}}^A(a_i)$. Niestety z tabeli 4.4 nie można odczytać w sposób jednoznaczny, która to będzie strategia. Wynika to z niejednoznaczności odpowiedzi gracza B na strategię a_4. Jeśli gracz A będzie miał pewność, iż jeśli wybierze strategię a_4, to w odpowiedzi gracz B wybierze strategię b_1, wówczas najkorzystniej dla gracza A jest wybrać strategię a_3, co da mu wypłatę równą 6 (wybranie strategii a_4 dałoby mu wypłatę równą 5). Jeśli zaś gracz B będzie miał

Tabela 4.4: Zestawienie najlepszej, z punktu widzenia gracza B odpowiedzi oraz wartości wypłat obu graczy dla każdej strategii gracza A.

	$\hat{b}(a_i)$	$V_i^B(\hat{b}(a_i))$	$V_{\hat{j}}^A(a_i)$
a_1	b_2	8	5
a_2	b_3 lub b_4	6	3 lub 5
a_3	b_4	6	6
a_4	b_1 lub b_4	7	5 lub 7

pewność, że w odpowiedzi na strategię a_4 gracz B wybierze strategię b_4, wówczas najlepszą strategią gracza A jest strategia a_4, zapewniająca mu wypłatę równą 7.

Którą strategię powinien wybrać gracz A, jeśli nie ma pewności, którą z równoważnych dla siebie strategii wybierze gracz B w odpowiedzi na strategię a_4? Odpowiedź nie jest tu jednoznaczna.

Problemem tym zająć się można w sposób następujący.

Wprowadzamy hipotetycznego dodatkowego gracza N, mającego wyłącznie dwie strategie n_1 i n_2. Gracza tego traktować będziemy jako naturę, której macierz wypłat jest nam nieznana, a której decyzje wpływają na strategie wybrane przez gracza B jedynie w ten sposób, że:

- jeśli gracz N wybierze strategię n_1, wówczas w odpowiedzi na strategię a_4 gracza A, gracz B wybierze strategię b_1;
- jeśli gracz N wybierze strategię n_2, wówczas w odpowiedzi na strategię a_4 gracza A, gracz B wybierze strategię b_4.

Na pozostałe decyzje gracza B wybrane strategie n_l nie mają wpływu.

Skonstruować możemy teraz macierz wypłat gracza A, odzwierciedlającą wartości jego wypłat dla rozważanych przez niego strategii a_3 i a_4 w zależności od stanów natury n_l. Macierz ta zilustrowana została w tabeli 4.5. Mając tak skonstruowaną macierz wypłat w grze przeciwko naturze, do wyboru właściwej strategii gry gracz A stosować może już narzędzia opisane w rozdziale 3.

4.3 Zamiast podsumowania

Na zakończenie tego krótkiego rozdziału, zapowiadającego szerokie spektrum dalszych analiz różnych modeli gier rynkowych powiemy jeszcze parę słów na temat momentu wielokryterialnego w tych analizach.

Tabela 4.5: Macierz wypłat gracz A w grze z graczem B, przy uwzględnieniu stanów natury N.

	n_1	n_2
a_3	$V_4^A(a_3) = 6$	$V_4^A(a_3) = 6$
a_4	$V_1^A(a_4) = 5$	$V_4^A(a_4) = 7$

Moment wielokryterialny nieodłącznie związany jest z koncepcją agregacji kryteriów oceny [142]. W analizie wielokryterialnych N-osobowych gier rynkowych mieli będziemy do czynienia z czterema poziomami agregacji:

- *Agregacja elementarnych funkcji wypłat*
  Agregacja ta polega na tworzeniu zaagregowanych kryteriów oceny o tej samej naturze z kryteriów elementarnych. Takim zaagregowanym kryterium będzie dla przykładu kryterium funkcji całkowitego zysku, które jest sumą kryteriów zysku czerpanego z poszczególnych jednostek usługowych, czy też kryterium ruchu wychodzącego z sieci, powstałe z elementarnego wyjścia modelu popytu D_{Aputn}^{XiYj}.

- *Agregacja niepewności*
  Agregacja ta związana jest z rodzajem przyjętego kryterium wyboru strategii w jednokryterialnej grze o charakterze gry przeciwko naturze. W istocie kryteria typu Walda, czy Optymistyczne nie są niczym innym, jak określoną agregacją wartości wypłat danego gracza dla poszczególnych strategii konkurentów.

- *Agregacja gier jednokryterialnych*
  Agregacja ta polega na tworzeniu ze zbioru gier jednokryterialnych (np. gra o zysk, gra o liczbę użytkowników, gra o wielkość ruchu itd) gry wielokryterialnej, uwzględniającej każdą z gier, w którą dany gracz gra.

- *Agregacja uczestników gry*
  Agregacja ta związana jest z tworzeniem syntetycznego kryterium oceny sprawności funkcjonowania rynku jako całości.

Należy mieć świadomość, iż z punktu widzenia uzyskiwanych rozwiązań, w analizie wielokryterialnej nie jest bez znaczenia kolejność stosowania powyższych agregacji.

Realne gry rynkowe są zawsze wielokryterialne. Wielu graczy funkcjonuje na wielu rynkach, świądczac wiele rodzajów usług i wiążąc z tym nadzieję realizacji wielu wewnętrznie złożonych celów. Zrozumienie struktury tego wielowymiarowego problemu wymaga całościowego - ujmującego zarówno charakterystyki dostawców (modele kosztów), jak i charakaterystyki odbiorców (modele popytu) świadczonych usług - spojrzenia na rynek. Czy prosta zasada oparcia cen za połączenia międzysieciowe na kosztach świadczenia usług zdoła udźwignąć ciężar tej wielowymiarowości? Jakim sposobem doprowadzi się rynek do efektywnej formy konkurencji, skoro w procesie regulacji pomija się tak wiele istotnych jego czynników? A jeśli nawet optimum zostanie osiągnięte - nie inaczej, jak drogą przypadkowego zbiegu wydarzeń - to kto będzie w stanie stwierdzić, że tak właśnie się stało? W pytaniach tych teza o niewystarczalności podejścia kosztowego do procesu ustalania cen za usługi telekomunikacyjne wybrzmiewa wyjątkowo mocno.

Część II

Dodatki i Zakończenie

Dodatek A

Kryteria wyboru strategii w grach przeciwko naturze

W niniejszym dodatku przedstawiono znane z literatury [33, 128, 131, 151, 190], jak również autorskie [108] kryteria wyboru strategii w grach przeciwko naturze[1]. Kryteria sformułowano w postaci analitycznej w dwóch wariantach - w postaci szczególnej i ogólnej. Dla każdego kryterium podano przykład macierzy wypłat ze wskazaniem na strategię, którą dane kryterium wybierze.

A.1 Kryteria znane z literatury

A.1.1 Kryterium Walda

Jest to procedura wyboru strategii, charakteryzująca się największą awersją do ryzyka. Zakłada, iż zdarzy się sytuacja najbardziej niekorzystna (gracz B wybierze taką strategię, która dla danej strategii gracza A da temuż wypłatę najgorszą z możliwych) i w takich warunkach określana jest najlepsza strategia (gracza A). Jest to tak zwana strategia *maxminowa*. Dla każdej z własnych strategii określana jest najgorsza (tu najmniejsza) z możliwych wypłat, a następnie wybierana jest ta strategia, która tę wypłatę maksymalizuje.

Jeśli przyjmiemy następujące oznaczenie:

$V_j^A(a_i)$ - wielkość wypłaty dla gracza A, gdy wybrał on strategię a_i, a gracz B wybrał strategię b_j,

[1] Gra przeciwko naturze to pojęcie zaczerpnięte z teorii gier opisujące sytuację decyzyjną w warunkach niepewności. W przypadku, gdy znane są prawdopodobieństwa „stanów natury” (decyzji konkurenta), sytuację decyzyjną określamy mianem podejmowania decyzji w warunkach ryzyka [131].

wówczas kryterium Walda definiuje następujące zadanie optymalizacji:

$$\max\{\min_j V_j^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{A.1}$$

Dla przykładu, załóżmy, iż macierz wypłat gracza A ma postać jak w tabeli A.1[2].

Tabela A.1: Macierz wypłat gracza A. Kryterium Walda wskazuje strategię a_2.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	2	2	0	1
a_2	1	1	1	1
a_3	0	4	0	0
a_4	1	3	0	0

Minimalne wypłaty dla poszczególnych strategii gracza A przedstawiają się następująco:

$$\begin{array}{l}
\min_j V_j^A(a_1) = V_3^A(a_1) = 0 \\
\min_j V_j^A(a_2) = V_1^A(a_2) = V_2^A(a_2) = V_3^A(a_2) = V_4^A(a_2) = 1 \\
\min_j V_j^A(a_3) = V_1^A(a_3) = V_3^A(a_3) = V_4^A(a_3) = 0 \\
\min_j V_j^A(a_4) = V_3^A(a_4) = V_4^A(a_4) = 0
\end{array}$$

Maksymalną z najmniejszych wygranych gwarantuje nam strategia a_2 i na nią wskaże kryterium Walda.

Kryterium Walda sformułowane w postaci (A.1), którą nazwiemy postacią *szczególną*, może prowadzić do niejednoznaczności rozwiązania, tzn., nie wyłoni jednej strategii najlepszej w sensie tego kryterium, lecz ich zbiór, mimo że któraś z nich będzie wyraźnie lepsza. Rozpatrzymy to na przykładzie macierzy wypłat z tabeli A.2. W tym przypadku kryterium Walda postaci (A.1) wskaże na dwie strategie gracza A, a_2 i a_5, nie rozróżniając ich między sobą, podczas gdy strategia a_5 jest tu wyraźnie lepsza.

Przykład ten uzasadnia sformułowanie kryterium Walda w postaci *ogólnej*. Zasada będzie tu następująca. Jeśli dla każdej strategii pierwszy z najgorszych elementów macierzy wypłat nie identyfikuje jednoznacznie strategii najlepszej, to sprawdzany jest element następny. Jest to zatem przykład tzw. *leksykograficznej optymalizacji* [131].

W przykładzie z tabeli A.2 kolejne porównania strategii przebiegałyby w sposób następujący. W pierwszym kroku wybrane zostają strategie a_2 i a_5 z najmniejszą wypłatą równą $V_1^A(a_2) = V_2^A(a_2) = V_3^A(a_2) = V_4^A(a_2) = V_1^A(a_5) = V_3^A(a_5) = 1$. W kroku drugim sytuacja w dalszym

[2] Przykład zaczerpnięto z pracy [151].

Tabela A.2: Przykład macierzy wypłat, w której kryterium Walda w postaci szczególnej nie identyfikuje jednoznacznie najlepszej strategii.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	2	2	0	1
a_2	1	1	1	1
a_3	0	4	0	0
a_4	1	3	0	0
a_5	1	3	1	6

ciągu pozostaje nierozstrzygnięta. Druga z najmniejszych wypłat dla obu strategii jest równa 1. W kroku trzecim trzecia z najgorszych wypłat dla strategii a_2 (równa 1) jest już mniejsza niż dla strategii a_5 ($V_2(a_5) = 3$). W tym momencie proces się kończy i zostaje wybrana strategia a_5.

Dla potrzeb sformułowania kryterium Walda w postaci ogólnej wprowadzimy przekształcenie porządkujące $\Theta(\mathbf{x})$, spełniające zależność

$$\theta_1(\mathbf{x}) \leqslant \theta_2(\mathbf{x}) \leqslant ... \leqslant \theta_J(\mathbf{x}), \tag{A.2}$$

gdzie J oznacza liczbę składowych wektora $\mathbf{x}$. Przekształcenie to porządkuje elementy składowe wektora $\mathbf{x}$ w kolejności od najmniejszego do największego.

Korzystając z przekształcenia θ, kryterium Walda w postaci ogólnej wyrazimy zależnością

$$\text{lexmax}\{\theta_1(\mathbf{V}^A(a_i)), \theta_2(\mathbf{V}^A(a_i)), ...\theta_m(\mathbf{V}^A(a_i)) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{A.3}$$

Gdzie $\mathbf{V}^A(a_i)$ jest wektorem wypłat dla strategii i gracza A.

A.1.2 Kryterium optymistyczne

Jest to procedura wyboru strategii, charakteryzująca się największym optymizmem. Zakłada, iż zdarzy się sytuacja najbardziej korzystna (gracz B wybierze taką strategię, która dla danej strategii gracza A da temuż wypłatę najlepszą z możliwych) i w takich warunkach określana jest najlepsza strategia (gracza A). Dla każdej z własnych strategii określana jest najlepsza (tu największa) z możliwych wypłat, a następnie wybierana jest ta strategia, która tę wypłatę maksymalizuje.

Kryterium optymistyczne zdefiniowane jest przez następujące zadanie optymalizacji:

$$\max\{\max_j V_j^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{A.4}$$

Jeśli macierz wypłat gracza A ma postać jak w tabeli A.1, to maksymalne wypłaty dla poszczególnych strategii gracza A przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned}
&\max_j V_j^A(a_1) = V_1^A(a_1) = V_2^A(a_1) = 2\\
&\max_j V_j^A(a_2) = V_1^A(a_2) = V_2^A(a_2) = V_3^A(a_2) = V_4^A(a_2) = 1\\
&\max_j V_j^A(a_3) = V_2^A(a_3) = 4\\
&\max_j V_j^A(a_4) = V_2^A(a_4) = 3
\end{aligned}$$

Maksymalną z największych wygranych gwarantuje nam strategia a_3 ($V_2^A(a_3) = 4$) i na nią wskaże kryterium optymistyczne.

W sformułowaniu ogólnym kryterium optymistyczne zdefiniowane będzie poniższym zadaniem optymalizacji leksykograficznej

$$\text{lexmax}\{\theta_J(\mathbf{V}(a_i)), \theta_{J-1}(\mathbf{V}(a_i)), ...\theta_1(\mathbf{V}(a_i)) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{A.5}$$

A.1.3 Kryterium Hurwicza

Kryterium Hurwicza jest uogólnioną postacią kryteriów Walda i optymistycznego. Bierze się tu pod uwagę tak zarówno wypłatę najlepszą (największą) z możliwych, jak i najgorszą (najmniejszą). Dla wyrażenia wagi zainteresowania wypłatą najlepszą i najgorszą wprowadza się tzw. *współczynnik optymizmu* - α.

Kryterium Hurwicza (w postaci szczególnej) zdefiniowane jest przez następujące zadanie optymalizacji:

$$\max\{\alpha \cdot \max_j V_j^A(a_i) + (1-\alpha) \cdot \min_j V_j^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{A.6}$$

Dla przykładu, jeśli macierz wypłat gracza A przedstawia się jak w tabeli A.3, wówczas w zależności od wartości współczynnika optymizmu α kryterium Hurwicza wskazuje odpowiednie strategie zgodnie z zasadą: dla $0 \leqslant \alpha \leqslant 0.2$ strategia a_3, dla $0.2 \leqslant \alpha \leqslant 0.4$ strategia a_2 i dla $0.4 \leqslant \alpha \leqslant 1$ strategia a_1. Jak widać dla $\alpha = 0.2$ kryterium Hurwicza wskazuje równocześnie na dwie strategie a_3 i a_2, a dla $\alpha = 0.4$, na strategie a_2 i a_1. Zależność wybranej strategii od wartości współczynnika α przedstawiono na rysunku A.1.

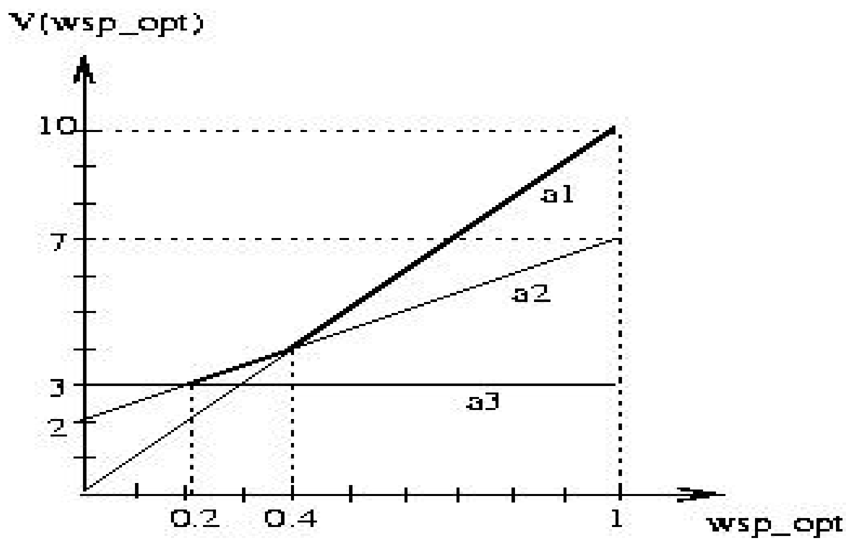
Sformułowanie ogólne wymaga rozpatrzenia dwóch przypadków: parzystej i nieparzystej liczby strategii gracza B. Przyjmiemy następujące oznaczenia.

$$\begin{aligned}
W_J &= \alpha \cdot \theta_J(\mathbf{V}^A(a_i)) + (1-\alpha) \cdot \theta_1(\mathbf{V}^A(a_i))\\
W_{J-1} &= \alpha \cdot \theta_{J-1}(\mathbf{V}^A(a_i)) + (1-\alpha) \cdot \theta_2(\mathbf{V}^A(a_i))\\
W_{J-2} &= \alpha \cdot \theta_{J-2}(\mathbf{V}^A(a_i)) + (1-\alpha) \cdot \theta_3(\mathbf{V}^A(a_i))\\
&\dots
\end{aligned}$$

Tabela A.3: Macierz wypłat gracza A. Dla $0 \leqslant \alpha \leqslant 0.2$ kryterium Hurwicza wskazuje strategię a_3, dla $0.2 \leqslant \alpha \leqslant 0.4$ strategię a_2 i dla $0.4 \leqslant \alpha \leqslant 1$ strategię a_1.

	b_1	b_2	b_3
a_1	10	0	0
a_2	7	2	2
a_3	3	3	3

Rysunek A.1: Ilustracja zależności wartości kryterium Hurwicza od wartości współczynnika optymizmu α =wsp_opt.



Dla parzystej liczby strategii gracza B ostatnim elementem będzie

$$W_{J-\frac{J}{2}+1} \quad = \quad \alpha \cdot \theta_{J-\frac{J}{2}+1}(\mathbf{V}^A(a_i)) + (1-\alpha) \cdot \theta_{\frac{J}{2}}(\mathbf{V}^A(a_i))$$

a dla nieparzystej liczby strategii:

$$W_{J-\frac{J-1}{2}} = \alpha \cdot \theta_{J-\frac{J-1}{2}}(\mathbf{V}^A(a_i)) + (1-\alpha) \cdot \theta_{\frac{J+1}{2}}(\mathbf{V}^A(a_i)) = \theta_{J-\frac{J-1}{2}}(\mathbf{V}^A(a_i))$$

Wówczas ogólnie dla parzystej liczby strategii gracza B kryterium Hurwicza definiujemy jako następujące zadanie optymalizacji leksykograficznej:

$$\text{lexmax}\{W_J, W_{J-1}, ..., W_{J-\frac{J}{2}+1} : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{A.7}$$

natomiast dla nieparzystej liczby strategii gracza B

$$\text{lexmax}\{W_J, W_{J-1}, ..., W_{J-\frac{J-1}{2}} : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{A.8}$$

A.1.4 Kryterium Laplace'a

Jest to procedura wyboru strategii, skupiająca uwagę na wartości oczekiwanej wypłaty, jaką może uzyskać gracz (A) wybierając daną strategię. Ponieważ brak jest informacji o macierzy wypłat gracza konkurencyjnego (B), to z konieczności trzeba założyć, iż z równym prawdopodobieństwem gracz ten wybrać może każdą ze swoich strategii[3]. W tym przypadku - gdy prawdopodobieństwa wyboru danych strategii przez konkurenta są jednakowe (lub z braku informacji przyjęte jako takie) - strategia maksymalizująca wartość oczekiwaną wypłaty, jest tożsama ze strategią maksymalizującą sumę (po wszystkich strategiach konkurenta) wypłat.

Kryterium Laplace'a wyrazimy zależnością

$$\max\{\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} V_j^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{A.9}$$

lub prościej

$$\max\{\sum_{j=1}^{J} V_j^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{A.10}$$

Jeśli macierz wypłat gracza A ma postać jak w tabeli A.1, to sumy wypłat (po strategiach gracza B) dla poszczególnych strategii gracza A przedstawiają się następująco:

$$\begin{array}{l} \sum_j V_j^A(a_1) = 5 \\ \sum_j V_j^A(a_2) = 4 \\ \sum_j V_j^A(a_3) = 4 \\ \sum_j V_j^A(a_4) = 4 \end{array}$$

Maksymalną sumę wypłat gwarantuje nam strategia a_1 ($\sum_j V_j^A(a_1) = 5$) i na nią wskaże kryterium Laplace'a.

Sformułowaniem ogólnym kryterium Laplace'a jest przypadek rozpatrywania sumy tylko kilku wybranych, największych bądź najmniejszych wypłat dla każdej strategii. I tak dla przypadku rozpatrywania sumy k największych wypłat, kryterium Laplace'a wyrazimy zależnością

$$\max\{\sum_{j=0}^{k-1} \theta_{J-j}(\mathbf{V}^A(a_i)) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{A.11}$$

[3] Bez tego założenia byłoby to równoznaczne z tworzeniem informacji, której się nie posiada.

natomiast dla przypadku sumy k najmniejszych wypłat, zależnością:

$$\max\{\sum_{j=1}^{k}\theta_j(\mathbf{V}^A(a_i)) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{A.12}$$

Warto zauważyć, iż szczególnym przypadkiem (dla $k = 1$) kryterium Laplace'a postaci (A.11) będzie kryterium Optymistyczne (A.4), a dla postaci (A.12) kryterium Walda (A.1).

A.1.5 Kryterium Savage'a

Kryterium to opiera się na obserwacji, iż w niektórych przypadkach wartość otrzymanej wypłaty ocenia się nie pod kątem jej bezwzględnej wartości, ale w porównaniu z najlepszą możliwą do osiągnięcia wypłatą, przy założeniu ustalonej strategii konkurenta. Jest to wyrazem tendencji do minimalizowania poczucia straty (utraconej korzyści). Dla każdej możliwej decyzji gracza B określa się wielkość straty - w stosunku do wartości najlepszej - jaką poniósłby gracz A wybierając daną strategię. Wartość straty gracza A (przy ustalonej strategii gracza B - j), określana jest tu jako różnica maksymalnej wypłaty $V_{j\max}$, jaką otrzymać mógłby gracz A i wypłaty, jaką otrzyma wybierając strategię i. Funkcję, która każdej wartości wypłaty z macierzy wypłat przyporządkuje wartość straty, nazywali będziemy *funkcją straty*.

Maksymalną wypłatę gracza A, przy ustalonej strategii j gracza B wyznaczyć można z zależności

$$V_{j\max}^A = \max_i V_j^A(a_i). \tag{A.13}$$

Natomiast funkcja straty wyrażać się będzie zależnością

$$\widetilde{V}_j^A(a_i) = V_{j\max}^A - V_j^A(a_i). \tag{A.14}$$

Zależność (A.14) pozwala nam przekształcić oryginalną macierz wypłat na macierz strat.

Kryterium Savage'a wskazuje na taką strategię, która minimalizuje maksymalną stratę. Jest to więc strategia *minmaxowa* dla macierzy strat

$$\min\{\max_j \widetilde{V}_j^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{A.15}$$

Jeśli macierz wypłat gracza A jest taka, jak w tabeli A.4, wówczas odpowiadająca jej macierz strat będzie miała postać tabeli A.5. W miejscach, gdzie w macierzy wypłat (tabela A.4) była wartość największa w kolumnie, w macierzy strat (tabela A.5) znajduje się wartość zerowa. Maksymalne wartości strat dla poszczególnych strategii gracza A przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned}
&\max_j \widetilde{V}_j^A(a_1) = \widetilde{V}_2^A(a_1) = 2\\
&\max_j \widetilde{V}_j^A(a_2) = \widetilde{V}_2^A(a_2) = 2\\
&\max_j \widetilde{V}_j^A(a_3) = \widetilde{V}_1^A(a_3) = 2\\
&\max_j \widetilde{V}_j^A(a_4) = \widetilde{V}_1^A(a_4) = \widetilde{V}_2^A(a_4) = \widetilde{V}_3^A(a_4) = \widetilde{V}_4^A(a_4) = 1
\end{aligned}$$

Tabela A.4: Macierz wypłat gracza A. Kryterium Savage'a wskazuje na strategię a_4.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	2	2	0	1
a_2	1	1	1	1
a_3	0	4	0	0
a_4	1	3	0	0

Tabela A.5: Macierz strat gracza A. Kryterium Savage'a wskazuje na strategię a_4.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0	2	1	0
a_2	1	3	0	0
a_3	2	0	1	1
a_4	1	1	1	1

Minimalną z największych strat gwarantuje nam strategia a_4 i na nią wskaże kryterium Savage'a.

Ogólnie kryterium Savage'a wyraża się zależnością

$$\mathrm{lexmin}\{\theta_J(\widetilde{\mathbf{V}}^A(a_i)), \theta_{J-1}(\widetilde{\mathbf{V}}^A(a_i)), ...\theta_1(\widetilde{\mathbf{V}}^A(a_i)) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{A.16}$$

A.2 Kryteria autorskie

A.2.1 Kryterium maksymalizacji liczby największych wygranych (LNW)

Pod pojęciem *największej wygranej* rozumieli będziemy wypłatę, której w macierzy strat odpowiada wartość zerowa. Kryterium LNW stosuje się w sytuacjach, kiedy gracz dąży nie tyle do minimalizacji wartości straty, jak to było w przypadku kryterium Savage'a, lecz do minimalizacji prawdopodobieństwa, że w ogóle takiej straty się doświadczy. Innymi słowy kryterium to wskazuje na tę strategię, która zawiera najwięcej takich wartości wypłat, którym w macierzy strat odpowiada wartość zerowa. Kryterium to podamy w dwóch postaciach - postaci minimalizacji najmniejszej straty i maksymalizacji liczby największych wygranych.

Kryterium LNW - postać minimalizacji najmniejszej straty

U początku prac nad nowymi kryteriami [108] poczyniono spostrzeżenie, iż kryterium Savage'a interpretować można jako zastosowanie kryterium Walda do macierzy strat[4]. Stąd powstał pomysł, by podobny zabieg uczynić z kryteriami optymistycznym, Laplace'a i Hurwicza. Zastosowanie kryterium Laplace'a do macierzy strat daje w efekcie znane z literatury [33] kryterium minimalizacji wartości oczekiwanej straty[5] (*expected opportunity loss*). Kryterium to (co łatwo udowodnić) w praktyce wskazuje zawsze na tę samą strategię, co kryterium Laplace'a zastosowane do macierzy wypłat. Zastosowanie zaś kryterium optymistycznego do macierzy strat daje w wyniku kryterium postaci

$$\min\{\min_j \widetilde{V}_j^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\} \tag{A.17}$$

gdzie $\widetilde{V}_j^A(a_i)$ jest zdefiniowaną zależnością (A.14) funkcją strat. W efekcie zastosowania kryterium Hurwicza do macierzy strat otrzymamy kryterium minimalizacji ważonej sumy największej i najmniejszej straty (WES), opisane w punkcie A.2.8.

Kryterium postaci (A.17) prowadzi zawsze, za wyjątkiem sytuacji, gdy jedna strategia dominuje wszystkie pozostałe, do niejednoznaczności. Wynika to stąd, iż tam, gdzie w macierzy wypłat znajduje się wartość największa w kolumnie ($V_{j\,\max}^A$), tam w macierzy strat odpowiednia wartość funkcji straty (A.14) przyjmuje wartość zero.

Rozpatrzmy macierz wypłat postaci tabeli A.4 i odpowiadającą jej macierz strat - tabela A.5. Widzimy, że dla trzech strategii gracza A - a_1, a_2 i a_3, minimalna wartość straty wynosi zero ($\widetilde{V}_1^A(a_1) = \widetilde{V}_3^A(a_2) = \widetilde{V}_2^A(a_3) = 0$), czyli kryterium postaci (A.17), nie wyłoni jednoznacznego rozwiązania. Wprowadźmy zatem sformułowanie ogólne

$$\operatorname{lexmin}\{\theta_1(\widetilde{\mathbf{V}}^A(a_i)), \theta_2(\widetilde{\mathbf{V}}^A(a_i)), ...\theta_J(\widetilde{\mathbf{V}}^A(a_i)) : i \in \mathcal{I}_A\} \tag{A.18}$$

Tak sformułowane kryterium szuka w pierwszej kolejności takiej strategii, która w macierzy strat ma najwięcej zer. Ponieważ wartościom zero w macierzy strat odpowiadają największe w kolumnach macierzy wypłat wartości wypłat, stąd możemy powiedzieć, iż kryterium w postaci (A.18) minimalizuje liczbę wypłat gracza A różnych od maksymalnej. Innymi słowy maksymalizuje Liczbę Największych Wygranych - LNW. W przypadku, gdy dwie strategie (lub więcej) posiadają w macierzy strat tyle samo wartości zerowych, wówczas rozpatrywane są kolejne wartości w macierzy strat w kolejności od najmniejszej do największej.

[4] Istotą kryterium Walda jest podejście pesymistyczne, zakładające zajście najgorszego przypadku. W tej sytuacji poszukuje się takiej strategii, której najgorsza wartość wypłaty jest najlepsza spośród wszystkich możliwych strategii. Stąd postać *maxminową*, stosowaną do macierzy wypłat, wolno nam zamienić na postać *minmaxową*, jeśli rozpatrywali będziemy macierz strat.

[5] Ściślej - utraconej korzyści.

Dla przykładu rozpatrzmy grę, w której macierz wypłat gracza A przedstawia się, jak w tabeli A.6[6]. Odpowiadającą jej macierz strat zilustrowano w tabeli A.7. Okazuje się, że w tym

Tabela A.6: Rozbudowana macierz wypłat gracza A.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	**2**	2	0	**1**	0
a_2	1	1	**1**	**1**	0
a_3	0	**4**	0	0	0
a_4	1	3	0	0	0
a_5	**2**	0	0	**1**	**1**

Tabela A.7: Rozbudowana macierz strat gracza A.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	**0**	2	1	**0**	1
a_2	1	3	**0**	**0**	1
a_3	2	**0**	1	1	1
a_4	1	1	1	1	1
a_5	**0**	4	1	**0**	**0**

przypadku, każde z kryteriów omawianych wcześniej, jak również dyskutowane kryterium postaci (A.18), wskazuje na inną strategię.

a_1 : Kryterium Laplace'a
a_2 : Kryterium Walda
a_3 : Kryterium Optymistyczne
a_4 : Kryterium Savage'a
a_5 : Kryterium LNW

Kryterium LNW wskazuje tu na strategię a_5, która zawiera najwięcej (3) maksymalnych w kolumnach wypłat (najwięcej zer w macierzy strat).

[6] Dla większej czytelności, wartości maksymalne w każdej kolumnie j ($V_{j\,\max}$) wypisane zostały tłustym drukiem.

Kryterium LNW - postać maksymalizacji liczby największych wygranych

Kryterium LNW postaci (A.18) minimalizuje liczbę wypłat gracza A różnych od maksymalnej ($V_{j\,\max}$) przy ustalonej strategii gracza B, co też inaczej można wyrazić jako maksymalizację liczby największych wygranych. Stwierdzić należy, iż z formalnego zapisu tego kryterium na pierwszy rzut oka nie jest prosto odczytać to, co ono w rzeczywistości robi. Ten fakt zachęca, by poszukać dla tego kryterium sformułowania alternatywnego.

Wprowadźmy przekształcenie Φ, takie że:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & dla \quad x \leqslant 0 \\ 0 & dla \quad x > 0 \end{cases}$$

Przekształcenie Φ może być sformułowane w bardzo różny sposób. Jeden z nich ilustruje zależność

$$\Phi(x) = \frac{sign(-x) + 1}{2}, \tag{A.19}$$

gdzie funkcja $sign(x)$ to funkcja *signum*, zwracająca wartość $+1$ dla $x \geqslant 0$ oraz -1 dla $x < 0$.

Korzystając z przekształcenia Φ możemy przedstawić kryterium LNW w postaci

$$\max\{\sum_j \Phi(\widetilde{V}_j^A(a_i)) : i \in \mathcal{I}_A\} \tag{A.20}$$

Kryterium LNW postaci (A.20), choć bardziej czytelnie oddaje zawartą w kryterium ideę wyboru strategii - konkretne rozumowanie stojące za podjętą decyzją (maksymalizacja liczby największych wygranych) - jest, z punktu widzenia eliminacji niejednoznaczności rozwiązań, słabsze aniżeli kryterium LNW postaci (A.18). Jednakże jest zdecydowanie lepsze od kryterium postaci (A.17). Kryterium postaci (A.20) z pewnością wskaże te strategie, które posiadają najwięcej największych wygranych. Nie można jednakże na jego podstawie rozróżnić strategii, które, mając taką samą liczbę maksymalnych wygranych, różnią się na pozostałych pozycjach wektora wypłat (a takie rozróżnienie uzyskamy w oparciu o kryterium postaci (A.18)). Sytuację tę ilustruje macierz wypłat przedstawiona w tabeli A.8.

W tym przypadku kryterium LNW postaci (A.20) wyłoni dwie równoważne w jego sensie strategie a_1 i a_2 z dwoma maksymalnymi wygranymi. Widzimy jednakże, iż strategia a_1 jest wyraźnie lepsza (z dokładnością do uporządkowania składowych wektora wypłat strategia a_1 dominuje[7] strategię a_2). Kryterium LNW postaci (A.18) wskazałoby tu jednoznacznie na strategię a_1.

Jednakże kryterium LNW postaci (A.20) posiada ważną zaletę w porównaniu z kryterium postaci (A.18), a mianowicie łatwiej się je liczy. Implementacja lexykograficznej optymalizacji

[7] Relację dominacji rozumiemy tu w następujący sposób: strategia i dominuje strategię a_k wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego j zachodzi zależność $V_j(a_i) \geqslant V_j(a_k)$.

Tabela A.8: Macierz wypłat gracza A. Kryterium LNW w postaci maksymalizacji liczby największych wygranych prowadzi do niejednoznaczności.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	**2**	2	**1**	0
a_2	1	0	**1**	**1**
a_3	0	**4**	0	0
a_4	1	3	0	0

- konieczna w przypadku sformułowania (A.18) - nie jest zadaniem prostym. Ponadto postać ta umożliwia wprowadzenie uogólnionej postaci kryterium LNW tzw. *kryterium maksymalizacji liczby największych wygranych z progiem uznania*, które przedstawiamy w następnym punkcie.

Problem niejednoznaczności, którego dla macierzy wypłat A.8 kryterium LNW postaci (A.20) nie jest w stanie rozstrzygnąć, łatwo można rozwiązać wprowadzając następującą modyfikację

$$\max\{\sum_j V_j^A(a_i) \cdot \Phi(\widetilde{V}_j^A(a_i)) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{A.21}$$

Niestety tak zmodyfikowane kryterium w szczególnych przypadkach traci swoją własność wyłaniania strategii o największej liczbie maksymalnych wygranych. Może się bowiem zdarzyć, iż dla dwóch strategii a_i oraz a_k takich, że strategia a_i ma więcej maksymalnych wygranych niż strategia k, zachodzić może zależność $\sum_j V_j^A(a_i) < \sum_k V_j^A(a_k)$. W tym przypadku kryterium (A.21) wskaże na strategię a_k, co nie jest zgodne z ideą kryterium liczby największych wygranych LNW. Ilustruje to przykład z macierzą wypłat, jak w tabeli A.9, i odpowiadającą jej macierzą strat - tabela A.10. Mimo że strategia a_1 posiada najwięcej (trzy) największych wygranych, kryterium (A.21) wskazuje tym razem na strategię a_2, bowiem suma z największych wygranych jest dla tej strategii największa ($3 + 2 = 5$). Widać zatem, iż kryterium postaci (A.21) jest w istocie rzeczy innym kryterium niż kryterium LNW. Nazwiemy je *kryterium maksymalizacji sumy z największych wypłat*, a jej uogólnioną postać z tzw. *progiem uznania* przedstawimy w dalszej części tekstu.

A.2.2 Kryterium maksymalizacji liczby największych wygranych z progiem uznania (LNWP)

Kryterium LNW postaci (A.20) brało pod uwagę tylko te wartości wypłat, którym w macierzy strat odpowiadała wartość zerowa, czyli w ścisłym tego słowa znaczeniu wygrane największe. W

Tabela A.9: Macierz wypłat gracza A. Zmodyfikowane kryterium LNW (A.21) wskazuje na strategię a_2, mimo że najwięcej maksymalnych wygranych posiada strategia a_1.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	**2**	**1**	**1**	1	1
a_2	**2**	0	0	**3**	1
a_3	1	0	0	1	**4**
a_4	**2**	0	**1**	2	2
a_5	0	**1**	**1**	2	3

Tabela A.10: Macierz strat gracza A. Zmodyfikowane kryterium LNW (A.21) wskazuje na strategię a_2, mimo że najwięcej maksymalnych wygranych posiada strategia a_1.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	**0**	**0**	**0**	2	3
a_2	**0**	1	1	**0**	3
a_3	1	1	1	2	**0**
a_4	**0**	1	**0**	1	2
a_5	1	**0**	**0**	1	1

kryterium LNWP (LNW z progiem uznania), prócz wartości wypłat największych wygranych brali będziemy dodatkowo pod uwagę te wypłaty, które mimo że w danej kolumnie macierzy wypłat nie są największe, to są na tyle zbliżone do wypłat największych, że za największe skłonni jesteśmy je uznać.

Rozpatrzmy dla przykładu macierz wypłat, jak w tabeli A.11. W tabeli tej najwięcej największych wygranych znajduje się w wierszu odpowiadającym strategii a_1. Są to wypłaty o wartości 8, dla strategii b_1 oraz 10, dla strategii b_3. Widzimy jednak, iż strategia a_2, z dokładnością do uporządkowania wartości wypłat, dominiuje strategię a_1, a i wartości strat nie są tu zbyt duże względem wypłat strategii a_1. Gdybyśmy przyjęli, że dla strategii a_2 wypłaty o wartości 7 (dla strategii b_1) oraz 9 (dla strategii b_3) można włączyć do zbioru największych wygranych (są one tylko o jednostkę mniejsze od odpowiadających im wypłat strategii a_1), wówczas strategia a_2 miałaby 3 największe wygrane (7, 9 i 10), natomiast strategia a_1 tylko dwie. W kryterium LNWP przyjmiemy zatem, iż daną wypłatę uznawali będziemy za największą wygraną, jeśli jej wartość będzie mniejsza od faktycznie największej wygranej w tej samej kolumnie o wartość nieprzekraczającą pewnej określonej wartości ρ, którą nazwiemy *progiem uznania*. Inaczej mówiąc, próg ρ wyznacza nam minimalną wartość straty, którą jeszcze za stratę jesteśmy skłonni uważać. Strata mniejsza niż ρ nie jest uważana za stratę, a tym samym odpowiadająca jej wypłata uważana jest za największą wygraną. Próg uznania definiowali będziemy w sensie względnym (procentowym) i bezwzględnym (rzeczywistej różnicy).

Tabela A.11: Macierz wypłat gracza A. Ilustracja potrzeby wprowadzenia progu uznania danej wartości wypłaty za największą w kolumnie - przykład 1.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	**8**	2	**10**	1
a_2	7	2	9	**10**
a_3	0	**5**	0	0
a_4	1	3	0	0

Zmodyfikujmy postać punkcji Φ. Dla progu bezwzględnego będzie ona miała teraz postać

$$\Phi(x,\rho) = \begin{cases} 1 & dla \quad x \leqslant \rho \\ 0 & dla \quad x > \rho \end{cases},$$

natomiast dla progu względnego postać

$$\Phi(x,\rho,x_{\max}) = \begin{cases} 1 & dla \quad \frac{x}{x_{\max}} \leqslant \rho \\ 0 & dla \quad \frac{x}{x_{\max}} > \rho \end{cases}$$

Przykładowe postaci zmodyfikowanej funkcji Φ ilustrują zależności (A.22), (A.23).

$$\Phi(x,\rho) = \frac{sign(\rho - x) + 1}{2} \tag{A.22}$$

$$\Phi(x,\rho,x_{\max}) = \frac{sign(\rho - \frac{x}{x_{\max}}) + 1}{2} \tag{A.23}$$

Wobec powyższego kryterium maksymalizacji liczby największych wygranych LNWP z bezwzględnym progiem uznania zdefiniujemy zależnością

$$\max\{\sum_j \cdot \Phi(\widetilde{V}_j^A(a_i),\rho) : i \in \mathcal{I}_A\} \tag{A.24}$$

natomiast kryterium maksymalizacji liczby największych wygranych LNWP ze względnym progiem uznania zależnością

$$\max\{\sum_j \cdot \Phi(\widetilde{V}_j^A(a_i),\rho, V_{j\,\max}^A) : i \in \mathcal{I}_A\} \tag{A.25}$$

A.2.3 Kryterium maksymalizacji sumy największych wypłat z progiem uznania (SNWP)

Istotą kryterium SNWP jest maksymalizacja sumy tych wypłat, którym w macierzy strat odpowiada wartość zerowa (największych wypłat), bądź taka, którą uznać możemy za pomijalnie małą. Motywacja gracza do wyboru danej strategii opiera się tu zatem z jednej strony na chęci unikania strat (minimalizacji prawdopodobieństwa, że ona wystąpi), a z drugiej strony na maksymalizacji wartości oczekiwanej wypłaty[8]. Jest to zatem swoista hybryda kryterium LNW i Laplace'a. Kryterium SNWP jest uogólnieniem kryterium (A.21). Kryterium (A.21) brało pod uwagę tylko

[8] To ostatnie stwierdzenie wymaga pewnego wyjaśnienia. Kryterium bazujące na maksymalizacji sumy wypłat jest tożsame z kryterium maksymalizacji wartości oczekiwanej wypłaty tylko pod warunkiem, że: po pierwsze, poszczególne wektory wypłat mają tyle samo elementów, innymi słowy dla każdej strategii gracza A gracz B ma tyle samo strategii, i po drugie, że wszystkie strategie graczy są jednakowo prawdopodobne. W rozpatrywanych przykładach oba warunki są spełnione. Należy mieć jednak świadomość, iż w przypadku, gdy bierzemy pod uwagę tylko największe wygrane z każdej rozpatrywanej strategii, wówczas pierwszy warunek - jednakowy wymiar wektora wypłat - nie musi być spełniony. Jeżeli dla przykładu dana strategia posiada jedną największą wygraną o wartości 4, wówczas zarówno suma, jak i wartość oczekiwana z największych wygranych wynosi 4. Jeśli jednak strategia ta posiadałaby dwie największe wygrane o wartości 4, wówczas wartość oczekiwana z tych wygranych ciągle wynosiłaby 4, podczas gdy suma 8. Jeśli dodatkowo występowałaby strategia o jednej największej wygranej równej 5, wówczas to, czy kierowalibyśmy się maksymalizacją wartości oczekiwanej z największych wypłat, czy

te wartości wypłat, którym w macierzy strat odpowiadała wartość zerowa, czyli w ścisłym tego słowa znaczeniu wygrane największe. W kryterium SNWP prócz tych wartości wypłat brali będziemy dodatkowo pod uwagę te wypłaty, które mimo że w danej kolumnie macierzy wypłat nie są największe, to są na tyle zbliżone do wypłat największych, że za największe skłonni jesteśmy je uznać.

Rozpatrzmy dla przykładu macierz wypłat, jak w tabeli A.12. Strategia a_1 posiada tu dwie największe wygrane (dla strategii b_1 i b_3), natomiast strategia a_2 jedną (dla strategii b_4) i strategia a_3 jedną (dla strategii b_2). Kryterium (A.21) sumując wypłaty dla każdej ze strategii brało będzie pod uwagę wyłącznie te największe wygrane i w ten sposób wskaże na strategię a_1 z sumą wypłat równą 12. Widzimy jednakże, iż strategia a_2 - z dokładnością do uporządkowania - dominuje strategię a_1. Gdybyśmy uznali, że wypłata o wartości 9, jaką otrzymuje gracz A z przecięcia strategii a_2 i b_3, należy do zbioru największych wygranych, wówczas wartość ta weszłaby do sumy dając dla strategii a_2 wartość $10 + 9 = 19$, co jest wynikiem lepszym niż w przypadku strategii a_1 $(2 + 10 = 12)$.

Tabela A.12: Macierz wypłat gracza A. Ilustracja potrzeby wprowadzanie progu uznania danej wartości wypłaty za największą w kolumnie - przykład 2.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	**2**	2	**10**	1
a_2	1	2	9	**10**
a_3	0	**4**	0	0
a_4	1	3	0	0

Analogicznie jak dla kryterium LNWP, w kryterium SNWP przyjmiemy zatem, iż daną wypłatę uznawali będziemy za największą wygraną, jeśli jej wartość będzie mniejsza od faktycznie największej wygranej w tej samej kolumnie o wartość nie przekraczającą wartości progu uznania ρ. Korzystając z wprowadzonej już definicji funkcji Φ z bezwzględnym progiem uznania (A.22), oraz ze względnym progiem uznania (A.23), kryterium maksymalizacji sumy największych wygranych SNWP z bezwzględnym progiem uznania zdefiniujemy zależnością

$$\max\{\sum_j V_j^A(a_i) \cdot \Phi(\widetilde{V}_j^A(a_i), \rho) : i \in \mathcal{I}_A\} \tag{A.26}$$

też sumą, nie byłoby bez znaczenia. Stąd też mówiąc tu, że stosując kryterium SNWP gracz kieruje się również maksymalizacją wartości oczekiwanej, czynimy w ten sposób pewne uproszczenie, mając na myśli wartość oczekiwaną z wszystkich wypłat w myśl zasady, iż dążąc do zwiększenia fragmentu, poniekąd dążymy do zwiększenia całości. Poniekąd, gdyż w szczególnych przypadkach oba dążenia nie muszą iść w parze.

natomiast kryterium maksymalizacji sumy największych wygranych SNWP ze względnym progiem uznania zależnością

$$\max\{\sum_j V_j^A(a_i) \cdot \Phi(\widetilde{V}_j^A(a_i), \rho, V_{j\,\max}^A) : i \in \mathcal{I}_A\} \tag{A.27}$$

A.2.4 Kryterium maksymalizacji wartości oczekiwanej wypłaty z progiem uznania (EWP)

Idea jest tu następująca. Przyjmujemy, iż gracz w swych decyzjach kieruje się kryterium maksymalizacji wartości oczekiwanej wypłaty (kryterium Laplace'a). Nie wszystkie wartości wypłat skłonny jest on jednakże traktować jako wygraną. Zakładamy, że interesują go tylko określone wartości wypłat, większe niż pewna wartość v, i tylko te jest on w stanie akceptować jako rzeczywistą wygraną. Wypłaty mniejsze niż v nie stanowią dla gracza żadnej wartości. Po przez analogię do kryterium SNWP wartość v nazywali będziemy *progiem uznania*. Różnica pomiędzy progiem ρ z kryterium SNWP, a wprowadzonym tu progiem v jest taka, iż próg ρ określa minimalną wartość straty, którą jesteśmy skłonni jeszcze za stratę uważać, natomiast próg v określa minimalną wartość wypłaty, którą skłonni jeszcze jesteśmy uznać za wygraną. Wprowadźmy zatem funkcję $\Psi(x, v)$ o następujących właściwościach:

$$\Psi(x, v) = \begin{cases} 1 & dla \quad x \geqslant v \\ 0 & dla \quad x < v \end{cases}$$

Przykładową postać funkcji $\Psi(x, v)$ ilustruje zależność

$$\Psi(x, v) = \frac{sign(x - v) + 1}{2}. \tag{A.28}$$

Korzystając z wprowadzonej funkcji $\Psi(x, v)$, kryterium maksymalizacji wartości oczekiwanej z progiem uznania EWP wyrazimy zależnością

$$\max\{\sum_j V_j^A(a_i) \cdot \Psi(V_j^A(a_i), v) : i \in \mathcal{I}_A\} \tag{A.29}$$

Kryterium to jest zatem uogólnieniem kryterium wartości oczekiwanej Laplace'a. Kryterium Laplace'a otrzymujemy podstawiając za próg uznania v wartość mniejszą bądź równą najmniejszej wartości wypłaty w macierzy wypłat.

Działanie tego kryterium zilustrujemy na przykładzie macierzy wypłat, jak w tabeli A.13. Gracz A, podobnie jak gracz B, ma tu do wyboru cztery strategie. Wartość oczekiwana dla każdej z nich jest jednakowa i wynosi $8 : 4 = 2$ (suma wypłat w wierszu podzielona przez ich liczbę). Tak więc kryterium wartości oczekiwanej Laplace'a nie wyłania spośród nich żadnej strategii. Sytuacja ta odpowiada podstawieniu za wartość progu uznania wartości mniejszej bądź równiej 0. Ustawiając próg uznania przykładowo na wartości 2, kryterium wartości oczekiwanej z progiem uznania wskazywało będzie już jednoznacznie na strategię a_2.

Tabela A.13: Macierz wypłat gracza A. Ilustracja działania kryterium maksymalizacji wartości oczekiwanej z progiem uznania.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	3	3	1	1
a_2	2	2	2	2
a_3	4	2	1	1
a_4	5	2	1	0

A.2.5 Kryterium minimalizacji wartości oczekiwanej straty z progiem uznania (ESP)

Poprzez analogię do kryterium maksymalizacji wartości oczekiwanej wypłaty z progiem uznania EWP, wprowadzimy kryterium minimalizacji wartości oczekiwanej straty z progiem uznania. Zakładamy tu, że za stratę uważamy tylko wartości większe niż próg v. Korzystając z funkcji straty, zdefiniowanej zależnością (A.14), oraz funkcji Ψ postaci (A.28), kryterium ESP wyrazimy zależnością

$$\min\{\sum_j \widetilde{V}_j^A(a_i) \cdot \Psi(\widetilde{V}_j^A(a_i), v) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{A.30}$$

Ponieważ kryterium maksymalizacji sumy wypłat (Laplace'a) jest tożsame z kryterium minimalizacji sumy strat (*Expected Opportunity Loss*), zatem kryterium ESP interpretować możemy jako maksymalizację sumy wypłat, dla których jest zauważalna (większa niż v) strata. Tu wyłania się subtelna różnica pomiędzy kryterium maksymalizacji sumy największych wygranych z progiem uznania SNWP, maksymalizacji wartości oczekiwanej wypłaty z progiem uznania EWP i minimalizacji wartości oczekiwanej straty z progiem uznania ESP, którą, jak to zostało powiedziane, interpretować można jako maksymalizację sumy wypłat, dla których jest zauważalna strata. Różnice nakreśla poniższe zestawienie.

kryterium	**działanie**
EWP	maksymalizuje sumę wypłat uznanych za wygraną
ESP	maksymalizuje sumę wypłat, dla których jest zauważalna strata
SNWP	maksymalizuje sumę wypłat, dla których strata jest niezauważalna

A.2.6 Kryterium maksymalizacji progowej wartości oczekiwanej wypłaty (PEW)

Kryterium maksymalizacji wartości oczekiwanej wypłaty z progiem uznania EWP (A.29) daje w szczególnym przypadku różne rozwiązania w zależności od tego, jaką przyjmie się wartość progu v. Dla przykładu, gdyby dla macierzy wypłat, jak w tabeli A.13 przyjąć wartość progu uznania v równą nie 2, lecz 3, wówczas kryterium to wskazałoby już nie na strategię a_2 lecz a_1, a dla $v = 5$, strategię a_4. Stąd pomysł stworzenia kryterium, które przy wyborze strategii brałoby pod uwagę wszelkie możliwe i sensowne wartości progów. Kryterium to jest użyteczne wówczas, kiedy gracz nie jest w stanie *a priori* ustalić właściwej wartości progu uznania.

Przyjmijmy zatem, że wartość progu v zmieniała się będzie od wartości najmniejszej do największej - patrząc na wartości wypłat w macierzy wypłat, zgodnie z krokiem o wartości v. Kryterium maksymalizacji progowej wartości oczekiwanej wypłaty PEW zdefiniujemy wówczas zależnością

$$\max\{\sum_k \sum_j V_j^A(a_i) \cdot \Psi(V_j^A(a_i), k \cdot v) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{A.31}$$

Dla przykładu, niech macierz wypłat gracza A przedstawia się jak w tabeli A.14. Wartość

Tabela A.14: Macierz wypłat gracza A. Ilustracja działania kryterium PEW.

	b_1	b_2	b_3
a_1	1	10	4
a_2	5	5	5
a_3	2	7	6

oczekiwana wypłaty dla każdej strategii gracza A jest jednakowa i wynosi $15 : 3 = 5$. Zbudujmy tabelę ilustrującą wartości oczekiwane (sumy) wypłat gracza A dla poszczególnych jego strategii, przy zmieniającej się wartości progu od wartości minimalnej równej 1, do wartości maksymalnej równej 10.

Jak widać z tabeli A.15 najlepszą w sensie kryterium maksymalizacji progowej wartości oczekiwanej wypłaty (A.31) jest strategia a_1 z progową wartością oczekiwaną wypłaty równą 3,9 (wartość średnia po progach = 11,7 podzielona przez liczbę strategii gracza $B = 3$).

W przypadku, gdyby przewidywano, iż poszczególne wartości progów $k \cdot v$ występować miały z prawdopodobieństwem p_k, wówczas kryterium PEW można przekształcić do postaci

$$\max\{\sum_k \sum_j p_k \cdot V_j^A(a_i) \cdot \Psi(V_j^A(a_i), k \cdot v) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{A.32}$$

A.2.7 Kryterium minimalizacji progowej wartości oczekiwanej straty (PES)

Kryterium minimalizacji wartości oczekiwanej straty z progiem uznania ESP (A.30) daje w szczególnym przypadku różne rozwiązania w zależności od tego, jaką przyjmie się wartość progu

Tabela A.15: Tabela sumy wypłat gracza A dla poszczególnych jego strategii przy różnych wartościach progu uznania v.

v	a_1	a_2	a_3
1	15	15	15
2	14	15	15
3	14	15	13
4	14	15	13
5	10	15	13
6	10	0	13
7	10	0	7
8	10	0	0
9	10	0	0
10	10	0	0
Suma	**117**	75	89
Średnia po progach	$\mathbf{11,7}$	7,5	8,9
E	$\mathbf{3,9}$	2,5	2,97

v. Kryterium minimalizacji progowej wartości oczekiwanej straty PES, analogicznie do kryterium maksymalizacji progowej wartości oczekiwanej wypłaty PEW rozpatruje wszelkie możliwe progi uznania, agregując - poprzez sumowanie po progach - otrzymane rozwiązania. Kryterium PES definiujemy zależnością

$$\min\{\sum_k \sum_j \widetilde{V}_j^A(a_i) \cdot \Psi(\widetilde{V}_j^A(a_i), k \cdot v) : i \in \mathcal{I}_A\} \tag{A.33}$$

Rozważmy dla przykładu macierz strat, jak w tabeli A.16 odpowiadającą macierzy wypłat przedstawionej w tabeli A.14. Zbudujmy tabelę ilustrującą sumy strat gracza A dla poszczególnych jego strategii, przy zmieniającej się wartości progu od wartości minimalnej równej 0, do wartości maksymalnej równej 5 - tabela A.17. W przykładzie tym kryterium minimalizacji pro-

Tabela A.16: Macierz żalu gracza A. Ilustracja działania kryterium PES.

	b_1	b_2	b_3
a_1	4	0	2
a_2	0	5	1
a_3	3	3	0

Tabela A.17: Tabela sumy strat gracza A dla poszczególnych jego strategii, przy różnych wartościach progu uznania v.

	a_1	a_2	a_3
0	6	6	6
1	6	6	6
2	6	5	6
3	4	5	6
4	4	5	0
5	0	5	0
Suma	26	32	**24**
Średnia po progach	4,3	5,3	**4**
E	1,4	1,8	**1,3**

gowej wartości oczekiwanej straty PES wybierze strategię a_3 z wartością oczekiwaną straty równą 1,3.

Definicja kryterium (A.33) uwzględnia próg uznania w sensie bezwzględnym, tzn. bez odniesienia do wartości maksymalnej $V_{j\,\max}$. W przypadku operowania na macierzy strat, bardziej właściwym wydaje się odwoływanie się do progów względnych. Dlatego też proponujemy dodatkową postać kryterium PES ze względnym progiem uznania, postaci

$$\min\{\sum_k \sum_j \widetilde{V}_j^A(a_i) \cdot \Psi(\widetilde{V}_j^A(a_i), k \cdot v, V_{j\,\max}^A) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{A.34}$$

Funkcja Ψ przybiera tu trzy argumenty i zdefiniowana jest zależnością

$$\Psi(x, v, x_{\max}) = \frac{sign(\frac{x}{x_{\max}} - v) + 1}{2}. \tag{A.35}$$

W przypadku, gdyby przewidywano, iż poszczególne wartości progów $k \cdot v$ występować miały z prawdopodobieństwem p_k, wówczas kryterium PES można przekształcić do postaci

$$\min\{\sum_k \sum_j p_k \cdot \widetilde{V}_j^A(a_i) \cdot \Psi(\widetilde{V}_j^A(a_i), k \cdot v, V_{j\,\max}^A) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{A.36}$$

Kryterium PES, podobnie jak to było w przypadku kryterium PEW, użyteczne jest wówczas, kiedy gracz nie jest w stanie *a priori* ustalić właściwej wartości progu uznania. Ponadto warto zauważyć, iż mimo, że zastosowanie kryterium maksymalizacji wartości oczekiwanej wypłaty (Laplace'a) daje w wyniku zawsze tę samą strategię co kryterium minimalizacji wartości oczekiwanej straty (*Expected Opportunity Loss*), to w przypadku kryteriów progowych PEW i PES tak już nie jest.

A.2.8 Kryterium minimalizacji ważonej sumy największej i najmniejszej straty (WES)

Kryterium minimalizacji ważonej sumy największej i najmniejszej straty WES definiujemy jako ważona suma kryterium LNW i kryterium Savage'a

$$\min\{\alpha \cdot \min_j \widetilde{V}_j^A(a_i) + (1-\alpha) \cdot \max_j \widetilde{V}_j^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{A.37}$$

Kryterium minimalizacji ważonej sumy największej i najmniejszej straty WES interpretować można jako zastosowanie kryterium Hurwicza do macierzy strat. Przez wersję optymistyczną rozumiemy tu sytuację, gdy gracz poniesie najmniejszą stratę, a przez wersję pesymistyczną, że poniesie stratę największą. Przy takim założeniu w dalszym ciągu współczynnik α interpretowany może być jako współczynnik optymizmu.

Podobnie jak dla kryterium Hurwicza, tak i dla kryterium WES podamy postać ogólną. Wprowadźmy następujące oznaczenia dla parzystej liczby strategii gracza B

$$
\begin{array}{lcl}
\widetilde{W}_1 & = & \alpha \cdot \theta_1(\widetilde{\mathbf{V}}^A(a_i)) + (1-\alpha)\cdot \theta_J(\widetilde{\mathbf{V}}^A(a_i)) \\
\widetilde{W}_2 & = & \alpha \cdot \theta_2(\widetilde{\mathbf{V}}^A(a_i)) + (1-\alpha)\cdot \theta_{J-1}(\widetilde{\mathbf{V}}^A(a_i)) \\
\ldots & & \\
\widetilde{W}_{\frac{J}{2}} & = & \alpha \cdot \theta_{\frac{J}{2}}(\widetilde{\mathbf{V}}^A(a_i)) + (1-\alpha)\cdot \theta_{J-\frac{J}{2}+1}(\widetilde{\mathbf{V}}^A(a_i)),
\end{array}
$$

a dla nieparzystej liczby strategii gracza B dodatkowo

$$
\widetilde{W}_{\frac{J+1}{2}} \quad = \quad \alpha \cdot \theta_{\frac{J+1}{2}}(\widetilde{\mathbf{V}}^A(a_i)) + (1-\alpha)\cdot \theta_{J-\frac{J-1}{2}}(\widetilde{\mathbf{V}}^A(a_i)).
$$

Wówczas kryterium WES w postaci ogólnej ilustrować będą zależności:

- dla parzystej liczby strategii gracza B

$$
\text{lexmin}\{W_1, W_2, ..., W_{\frac{J}{2}} : i \in \mathcal{I}_A\} \tag{A.38}
$$

- dla nieparzystej liczby strategii gracza B

$$
\text{lexmax}\{W_1, W_2, ..., W_{J-\frac{J-1}{2}} : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{A.39}
$$

Dodatek B

Regularyzacja rozwiązań niejednoznacznych

Pod pojęciem *regularyzacji* rozumiemy proces usuwania niejednoznaczności rozwiązania otrzymanego przez wybór strategii w oparciu o kryterium X, poprzez zastosowanie innego kryterium wyboru Y. Innymi słowy, jeśli w oparciu o dane kryterium wyboru otrzymamy dwie lub więcej strategii - ogólnie zbiór strategii - nierozróżnialnych w sensie tego kryterium, to, stosując do tych strategii inne kryterium wyboru, zbiór ten możemy zredukować. W szczególnym przypadku możemy wyłonić jedną, najlepszą w tym sensie strategię. Proces regularyzacji rozwiązania otrzymanego w wyniku stosowania kryterium X przez kryterium Y zapisywali będziemy umownie w postaci $X : Y$.

Okazuje się, że nie każde zestawienie kryteriów wyboru jest użyteczne. Przez użyteczne zestawienie kryteriów X i Y rozumiemy takie zestawienie, dla którego istnieje macierz wypłat taka, że kryterium X wyłania z niej co najmniej dwie strategie w jego sensie nierozróżnialne, a kryterium Y liczność tego zbioru redukuje, w szczególności wyłania jedną strategię najlepszą w sensie $X : Y$. Nieużytecznym nazywali będziemy takie zestawienie $X : Y$, dla którego taka macierz nie istnieje.

Poniżej przedstawiamy użyteczne i nieużyteczne zestawienia kryteriów w procesie regularyzacji:

1. Regularyzacje użyteczne:
   (a) kryterium Laplace'a : kryterium Walda (Lap : Wal)
   (b) kryterium Laplace'a : kryterium Optymistyczne (Lap : Opt)
   (c) kryterium Laplace'a : kryterium Savage'a (Lap : Sav)
   (d) kryterium Laplace'a : kryterium LNW (Lap : LNW)

   (e) kryterium Walda : kryterium Savage'a (Wal : Sav)
   (f) kryterium Walda : kryterium LNW (Wal : LNW)
   (g) kryterium Optymistyczne : kryterium Savage'a (Opt : Sav)
   (h) kryterium Optymistyczene : kryterium LNW (Opt : LNW)
   (i) kryterium Savage'a : kryterium Walda (Sav : Wal)
   (j) kryterium Savage'a: kryterium Optymistyczne (Sav : Opt)
   (k) kryterium LNW : kryterium Walda (LNW : Wal)
   (l) kryterium LNW : kryterium Optymistyczne (LNW : Opt)

2. Regularyzacje nieużyteczne:
   (a) kryterium Walda : kryterium Optymistyczne (Wal : Opt)
   (b) kryterium Walda : kryterium Laplace'a (Wal : Lap)
   (c) kryterium Optymistyczne : kryterium Walda (Opt : Wal)
   (d) kryterium Optymistyczne : kryterium Laplace'a (Opt : Lap)
   (e) kryterium Savage'a : kryterium Laplace'a (Sav : Lap)
   (f) kryterium Savage'a : kryterium LNW (Sav : LNW)
   (g) kryterium LNW : kryterium Laplace'a (LNW : Lap)
   (h) kryterium LNW : kryterium Savage'a (LNW : Sav)

Zestawienia dokonano wyłącznie dla tych spośród wymienionych w Dodatku A kryteriów, dla których nie odwoływano się do koncepcji progu uznania. Wynika to z faktu, iż wynik użycia kryteriów progowych zależny jest od przyjętej wartości progu. Z analogicznego powodu nie uwzględniono kryterium Hurwicza oraz WES, których działanie zależne jest od przyjętej wartości współczynnika optymizmu.

Poniżej uzasadniono użyteczność lub nieużyteczność wypunktowanych zestawień.

Przykład B.1

Rozważmy macierz wypłat gracza A, jak w tabeli B.1, i odpowiadającą jej macierz strat - tabela B.2. W tej sytuacji kryteria Walda, Optymistyczne i Laplace'a wyłonią dwie, nierozróżnialne w ich sensie strategie gracza A - a_1 i a_2. Jeśli zastosujemy regularyzację z wykorzystaniem kryterium Savage'a to wybrana zostania strategia a_1. Natomiast kryterium LNW wyłoni strategię a_2. Niniejszym uzasadniliśmy użyteczność regularyzacji Wal : Sav (1e), Opt : Sav (1g), Lap : Sav (1c), Wal : LNW (1f), Opt : LNW (1h) oraz Lap : LNW (1d). □

Tabela B.1: *Regularyzacja - macierz wypłat: usunięcie niejednoznaczności rozwiązań otrzymanych w wyniku stosowania kryteriów Walda, Optymistycznego i Laplace'a przez kryteria Savage'a i LNW.*

	b_1	b_2	b_3
a_1	4	2	1
a_2	1	4	2
a_3	0	4	2

Tabela B.2: *Regularyzacja - macierz strat: usunięcie niejednoznaczności rozwiązań otrzymanych w wyniku stosowania kryteriów Walda, Optymistycznego i Laplace'a przez kryteria Savage'a i LNW.*

	b_1	b_2	b_3
a_1	0	2	1
a_2	3	0	0
a_3	4	0	0

Tabela B.3: *Regularyzacja - macierz wypłat: usunięcie niejednoznaczności rozwiązań otrzymanych w wyniku stosowania kryterium Laplace'a przez kryteria Walda i Optymistyczne.*

	b_1	b_2	b_3
a_1	3	2	2
a_2	1	4	2
a_3	0	4	2

Przykład B.2

Rozważmy przypadek macierzy wypłat gracza A postaci jak w tabeli B.3. W tym przypadku kryterium Laplace'a wskazuje na dwie nierozróżnialne w jego sensie strategie a_1 i a_2. Natomiast zastosowanie regularyzacji z wykorzystaniem kryterium Walda wskaże jednoznacznie na strategię a_1, natomiast kryterium Optymistyczne strategię a_2. Niniejszym uzasadniliśmy użyteczność regularyzacji Lap : Wal (1a) i Lap : Opt (1b). □

Przykład B.3

Rozważmy przypadek macierzy wypłat gracza A postaci jak w tabeli B.4 i odpowiadającą jej macierz strat - tabela B.5. Kryterium Savage'a wskazuje tu na dwie, nierozróżnialne w jego

Tabela B.4: Regularyzacja - macierz wypłat: usunięcie niejednoznaczności rozwiązań otrzymanych w wyniku stosowania kryterium Savage'a przez kryteria Walda i Optymistyczne.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	1	1	1	2	4
a_2	0	4	0	1	4
a_3	2	4	3	2	0

Tabela B.5: Regularyzacja - macierz strat: usunięcie niejednoznaczności rozwiązań otrzymanych w wyniku stosowania kryterium Savage'a przez kryteria Walda i Optymistyczne.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	1	3	2	0	0
a_2	2	0	3	1	0
a_3	0	0	0	0	4

sensie strategie gracza A - a_1 i a_2. Zastosowanie regularyzacji z wykorzystaniem kryterium Walda wskaże jednoznacznie na strategię a_1, natomiast kryterium Optymistyczne strategię a_2. Niniejszym uzasadniliśmy użyteczność regularyzacji Sav : Wal (1i) i Sav : Opt (1j). □

Przykład B.4

Rozważmy przypadek macierzy wypłat gracza A postaci jak w tabeli B.6 i odpowiadającą jej macierz strat - tabela B.7. Kryterium LNW wskazuje tu na dwie, nierozróżnialne w jego

Tabela B.6: Regularyzacja - macierz wypłat: usunięcie niejednoznaczności rozwiązań otrzymanych w wyniku stosowania kryterium LNW przez kryteria Walda i Optymistyczne.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	2	4	0	3	5
a_2	1	4	2	3	4
a_3	1	3	1	2	6

Tabela B.7: Regularyzacja - macierz strat: usunięcie niejednoznaczności rozwiązań otrzymanych w wyniku stosowania kryterium LNW przez kryteria Walda i Optymistyczne.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	0	0	2	0	1
a_2	1	0	0	0	2
a_3	1	1	1	1	6

sensie strategie gracza A - a_1 i a_2. Zastosowanie regularyzacji z wykorzystaniem kryterium Walda wskaże jednoznacznie na strategię a_2, natomiast kryterium Optymistyczne strategię a_1. Niniejszym uzasadniliśmy użyteczność regularyzacji LNW : Wal (1k) i LNW : Opt (1l). $\square$

Wykażmy wreszcie, iż regularyzacje Wal : Opt (2a), Wal : Lap (2b), Opt : Wal (2c), Opt : Lap (2d), Sav : Lap (2e), Sav : LNW (2f), LNW : Lap (2g) i LNW : Sav (2h) są nieużyteczne.

Wektory wypłat odpowiadające dwóm strategiom nierozróżnialnym w sensie kryterium Optymistycznego, czy Walda są wektorami jednakowymi z dokładnością do porządku, tzn. porządkując składowe tych wektorów w kolejności od wartości najmniejszej do największej lub odwrotnie, otrzymamy w efekcie dwa jednakowe wektory. W szczególności suma poszczególnych składowych tych wektorów jest jednakowa. Stąd płynie stwierdzenie o nieużyteczności regularyzacji Wal : Opt (2a), Wal : Lap (2b), Opt : Wal (2c) i Opt : Lap (2d). Podobnie rzecz ma się z wektorami w macierzy strat, na których operują kryteria Savage'a i LNW. Stąd płynie wniosek o nieużyteczności regularyzacji Sav : LNW (2f) LNW : Sav (2h). Nieużyteczność regularyzacji Sav : Lap (2e), i LNW : Lap (2g) wynika z następującego rozumowania: zastosowanie kryterium Laplace'a do macierzy wypłat daje w efekcie ten sam rezultat, co zastosowanie go do macierzy strat[1]. Kryterium Savage'a interpretować można jako zastosowanie kryterium Walda do macierzy strat. Zatem, na mocy stwierdzenia o nieużyteczości regularyzacji Wal : Lap stwierdzamy nieużyteczność regularyzacji Sav : Lap. Kryterium LNW zaś interpretować można jako zastosowanie kryterium Optymistycznego do macierzy strat. Stąd, na mocy stwierdzenia nieużyteczności regularyzacji Opt : Lap, wnioskujemy o nieużyteczności regularyzacji LNW : Lap.

[1] Kryterium Laplace'a, jak to już w innym miejscu sygnalizowaliśmy, jest w istocie tożsame z kryterium *expected opportunity loss*.

Dodatek C

Współczynniki SQ i KD dla poszczególnych kryteriów wyboru strategii

Niniejszy dodatek ilustruje sposób wyznaczania współczynników SQ (*Status Quo*) oraz KD (*Known Decision*) dla poszczególnych kryteriów wyboru strategii, przedstawionych w dodatku A. Przypomnijmy znaczenie indeksowania dla poszczególnych współczynników:

SQ_A^X	-	(*Status Quo*) aktualnie wyliczona wypłata dla operatora A w oparciu o kryterium wyboru strategii X.
KD_{AB}^X	-	(*Known Decision of Operator B*) wypłata operatora $A \neq B$ wyliczona w oparciu o kryterium X przy znajomości decyzji operatora B.

Ponadto przyjmiemy, iż KD_{ABj}^X oznaczać będzie wartość wypłaty[1] dla operatora A, wyliczoną w oparciu o kryterium wyboru strategii X, gdy wiadomo, że operator B wybrał strategię b_j.

W celu uzyskania większej przejrzystości zapisu, rozpatrzymy przypadek trzech operatorów - A, B i C. Oznaczmy:

$i \in \mathcal{I}_A$	-	indeks strategii operatora A;
$j \in \mathcal{I}_B$	-	indeks strategii operatora B;
$k \in \mathcal{I}_C$	-	indeks strategii operatora C;
$V_{jk}^A(a_i)$	-	wypłata operatora A, gdy wybrał on strategię a_i, operator B wybrał strategię b_j, a operator C wybrał strategię c_k.

Uogólnienie na większą liczbę operatorów uzyskamy w prosty sposób poprzez zwiększenie liczby

[1] Pojęcie *wypłaty* tylko w szczególnych przypadkach będzie miało tu znaczenie rzeczywistej wypłaty, czyli konkretnej wartości z macierzy wypłat. W innych przypadkach będzie to np. wartość straty (kryterium Savage'a), lub też liczba największych wygranych (kryterium LNW).

indeksów. I tak dla czterech operatorów, gdzie m oznacza indeks strategii operatora D, wypłatę operatora A oznaczali będziemy przez $V_{jkm}(a_i)$.

Współczynniki SQ i KD wyznaczymy z punktu widzenia operatora A, przy znajomości decyzji operatora B. A zatem wyznaczymy współczynniki SQ_A^X oraz KD_{AB}^X, gdzie X oznacza rozpatrywane kryterium wyboru strategii. Współczynniki dla pozostałych operatorów wyznacza się w sposób analogiczny.

Definiując poszczególne współczynniki dla każdego z kryteriów, korzystali będziemy z postaci szczególnej tych kryteriów.

C.1 SQ i KD dla kryterium Walda

Kryterium Walda (punkt A.1.1 w dodatku A) zakłada, iż gracze konkurencyjni wybiorą strategię najbardziej niekorzystną dla operatora A. Wartość SQ_A^{Wald} wyznaczamy przy założeniu nieznajomości decyzji żadnego z operatorów konkurencyjnych i przy założeniu, iż zdarzy się przypadek najbardziej niekorzystny dla operatora A (pozostali operatorzy B i C dążyli będą do minimalizacji wartości wypłaty operatora A). Stąd

$$SQ_A^{Wald} = \max\{\min_{j,k} V_{jk}^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{C.1}$$

Jeśli przyjmiemy, że operator B wybrał strategię b_j, wówczas wartość współczynnika KD_{ABj}^{Wald} wyliczamy zgodnie z kryterium Walda przy założeniu, że operator C wybiera taką strategię c_k, która jest najgorsza dla operatora A, czyli minimalizuje jego wartość wypłaty

$$KD_{ABj}^{Wald} = \max\{\min_{k} V_{jk}^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{C.2}$$

Mając zbiór wypłat KD_{ABj}^{Wald} wyliczonych dla różnych strategii b_j operatora B, wybieramy zgodnie z kryterium Walda najgorszą (tu najmniejszą) z nich. Stąd współczynnik KD_{AB}^{Wald} wyznaczymy z zależności

$$KD_{AB}^{Wald} = \min_{j} KD_{ABj}^{Wald} \tag{C.3}$$

C.2 SQ i KD dla kryterium Optymistycznego

Dla kryterium Optymistycznego przyjmuje się, że gracz A wybiera tę strategię, w której największa wartość wypłaty jest największa spośród wszystkich wypłat w macierzy. Jeśli więc przyjmiemy, iż

$$SQ_A^{Opt} = \max\{\max_{j,k} V_{jk}(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{C.4}$$

wówczas otrzymujemy $KD_{AO}^{Opt} = SQ_A^{Opt}$, bowiem poznanie decyzji gracza O nie może nam poprawić (ani pogorszyć) wartości wypłaty względem SQ_A^{Opt}.

Można też zastosować podejście mieszane - optymistyczno-pesymistyczne. Założymy, że operator B wybierze strategię najbardziej korzystną dla A natomiast operator C najbardziej niekorzystną, czyli optymizm względem decyzji operatora B i pesymizm względem decyzji operatora C[2]. Stąd wartość współczynnika *status quo* w tym przypadku wyliczymy zgodnie z równaniem na *status quo* dla kryterium Walda (C.1).

$$SQ_A^{Opt} = SQ_A^{Wald}$$

Również zachodzić będzie zależność:

$$KD_{ABj}^{Opt} = KD_{Bj}^{Wald},$$

czyli wielkość ta wyrazi się równaniem (C.2).

Różnica - względem kryterium Walda - dotyczyła będzie sposobu wyznaczenia współczynnika KD_{AB}^{Opt}. Ponieważ zakładamy tu, że operator B wybiera strategię najlepszą dla operatora B stąd

$$KD_{AB}^{Opt} = \max_j KD_{ABj}^{Opt}. \tag{C.5}$$

C.3 SQ i KD dla kryterium Hurwicza

Kryterium Hurwicza (punkt A.1.3 w dodatku A) zdefiniowane zostało jako ważona suma wypłat wyliczonych w oparciu o kryteria Walda i Optymistycznego (A.6). Konstruując współczynniki SQ i KD dla tego kryterium spróbujemy tę logikę podtrzymać. Nie jest to jednakże proste. Na problem napotykamy już przy konstrukcji współczynnika *status quo* - SQ. Samoczynnie nasuwają się dwa sposoby definicji tego współczynnika dla kryterium Hurwicza. Pierwszy wydaje

[2] To założenie wymaga pewnego wyjaśnienia. W sytuacji, gdy wypłata operatora A zależy tak zarówno od decyzji operatora B, jak i C, pojęcie strategii najbardziej korzystnej lub niekorzystnej przestaje być oczywiste. Obie decyzje razem wzięte wpływają na wynik i niemożliwym jest wskazanie (poza przypadkami, gdy któryś z operatorów posiada strategię dominującą wszystkie pozostałe) decyzji najkorzystniejszej, lub najbardziej niekorzystnej. Rozumieć to raczej należy w sensie względnym, czyli najbardziej korzystna lub niekorzystna strategia jednego operatora (B) przy ustalonej strategii drugiego (C) lub pozostałych, jeśli jest ich więcej. Ponadto, aby model gry przeciwko naturze był adekwatny do modelowanej sytuacji, musimy założyć, iż operator C podejmuje decyzję jako ostatni, w przeciwnym bowiem razie wynik gry otrzymany po zestawieniu decyzji operatora A i C można by poprawiać (w przypadku założenia optymizmu co do decyzji operatora B) poprzez właściwy wybór strategii przez operatora B. Byłoby to zatem równoznaczne już nie tyle ze znajomością decyzji operatora B, co z możliwością wpływania na nią, niejako rozbicia decyzji operatora A na dwa etapy - pierwsza decyzja, przed decyzją operatora C i druga zaraz po niej.

się być oczywisty

$$SQ_A^{Hur} = \max\{\alpha \cdot \max_{j,k} V_{jk}^A(a_i) + (1-\alpha) \cdot \min_{j,k} V_{jk}^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{C.6}$$

Wydaje się, bowiem burzy on logikę konstrukcji SQ dla kryteriów Walda i Optymistycznego. Tam, przypomnijmy, współczynniki te liczone były w ten sam sposób. Zatem dla kryterium Hurwicza SQ winniśmy raczej wyrazić zależnością

$$SQ_A^{Hur} = \max\{\alpha \cdot \min_{j,k} V_{jk}^A(a_i) + (1-\alpha) \cdot \min_{j,k} V_{jk}^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{C.7}$$

co jest równoznaczne z

$$SQ_A^{Hur} = \max\{\min_{j,k} V_{jk}^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{C.8}$$

Ten sposób mimo wszystko wydaje się nam być bardziej logiczny i przy nim w związku z tym pozostaniemy.

Współczynnik wypłaty dla operatora A w sytuacji, gdy operator B wybrał swoją strategię b_j, zdefiniujemy identycznie jak dla kryterium Walda (C.2). Podtrzymujemy zatem założenie pesymizmu odnośnie strategii operatora C. Czynnik najbardziej charakterystyczny dla kryterium Hurwicza, czyli ważona suma prognozy optymistycznej i pesymistycznej, zachowana będzie dla prognozy decyzji operatora B. Stąd wielkość wypłaty dla operatora A przy znajomości decyzji operatora B wyrazimy zależnością

$$KD_{AB}^{Hur} = \max\{\alpha \cdot \max_j KD_{Bj}^{Hur} + (1-\alpha) \cdot \min_j KD_{Bj}^{Hur} : i \in \mathcal{I}_A\} \tag{C.9}$$

C.4 SQ i KD dla kryterium Laplace'a

Współczynnik *status quo* wyznaczymy dla kryterium Laplace'a (punkt A.1.4 w dodatku A) jako największą wartość średnią z wszystkich strategii

$$SQ_A^{Lap} = \max\{\frac{1}{J \cdot K} \sum_{j,k} V_{jk}^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{C.10}$$

przy czym J i K oznaczają tu odpowiednio liczbę strategii operatora B i C. W analogiczny sposób liczyć będziemy współczynnik KD_{ABj}^{Lap}

$$KD_{ABj}^{Lap} = \max\{\frac{1}{K} \sum_{k} V_{jk}^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{C.11}$$

Kontynuując logikę kryterium Laplace'a współczynnik KD_{AB}^{Lap} wyznaczymy jako wartość oczekiwaną KD_{ABj}^{Lap}

$$KD_{AB}^{Lap} = \frac{1}{J} \sum_{j} KD_{ABj}^{Lap}. \tag{C.12}$$

C.5 SQ i KD dla kryterium Savage'a

Ponieważ kryterium Savage'a (punkt A.1.5 w dodatku A) traktować można jako zastosowanie kryterium Walda do macierzy strat, zatem korzystając z doświadczenia, nabytego w trakcie konstrukcji współczynników dla kryterium Walda, dla kryterium Savage'a współczynnik SQ_A^{Sav} zdefiniujemy w postaci zależności

$$SQ_A^{Sav} = \min\{\max_{j,k} \widetilde{V}_{jk}^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{C.13}$$

współczynnik KD_{ABj}^{Sav} w postaci zależności

$$KD_{ABj}^{Sav} = \min\{\max_{k} \widetilde{V}_{kj}^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{C.14}$$

zaś KD_{AB}^{Sav} w postaci

$$KD_B^S = \max_j KD_{ABj}^{Sav}, \tag{C.15}$$

gdzie $\widetilde{V}_{jk}^A(a_i) = V_{jk\max}^A - V_{jk}^A(a_i)$ jest funkcją strat, zaś $V_{jk\max}^A = \max_i V_{jk}^A(a_i)$ wartością maksymalną wypłaty operatora A dla ustalonych strategii b_j i c_k operatorów B i C.

C.6 SQ i KD dla kryterium LNW

Dla potrzeb konstrukcji współczynników SQ oraz KD posłużymy się kryterium LNW (punkt A.2.1 w dodatku A) w postaci liczby największych wygranych. Stąd[3]

$$SQ_A^{LNW} = \max\{\sum_{j,k} \Phi(\widetilde{V}_{jk}^A(a_i)) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{C.16}$$

gdzie Φ zdefiniowane jest zależnością (A.19).

W analogiczny sposób wyznaczymy wartości współczynników KD_{ABj}^{LNW}

$$KD_{ABj}^{LNW} = \max\{\sum_{k} \Phi(\widetilde{V}_{jk}^A(a_i)) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{C.17}$$

Ponieważ kryterium LNW interpretować można jako zastosowanie kryterium Optymistycznego do macierzy strat (patrz punkt A.2.1 w dodatku A), zatem możemy przyjąć

$$KD_{AB}^{LNW} = \max_j KD_{ABj}. \tag{C.18}$$

Użytecznym jednakże wydaje się również branie pod uwagę najgorszego przypadku, w którym operator B nie wybierze strategii najbardziej korzystnej dla operatora A. A zatem możemy również przyjąć wersję

$$KD_{AB}^{LNW} = \min_j KD_{ABj}. \tag{C.19}$$

[3] Jak to już wcześniej sygnalizowano, SQ nie oznacza tu faktycznej wypłaty tylko liczbę takich, które uznaje się za największe.

C.7 SQ i KD dla kryterium LNWP

Kryterium LNWP (punkt A.2.2 w dodatku A) jest uogólnioną wersją kryterium LNW w postaci maksymalizacji liczby największych wygranych. Kryterium LNWP wprowadza dwa progi uznania - względny i bezwzględny. Konstrukcja współczynników SQ i KD przebiegać będzie w sposób analogiczny, jak dla kryterium LNW. I tak dla bezwzględnego progu uznania ρ otrzymamy

$$SQ_A^{LNWP} = \max\{\sum_{j,k} \Phi(\widetilde{V}_{jk}^A(a_i), \rho) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{C.20}$$

$$KD_{ABj}^{LNWP} = \max\{\sum_{k} \Phi(\widetilde{V}_{jk}^A(a_i), \rho) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{C.21}$$

gdzie Φ zdefiniowane jest zależnością (A.22), natomiast dla progu ρ względnego otrzymamy

$$SQ_A^{LNWP} = \max\{\sum_{j,k} \Phi(\widetilde{V}_{jk}^A(a_i), \rho, V_{jk\,\max}^A) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{C.22}$$

$$KD_{ABj}^{LNWP} = \max\{\sum_{k} \Phi(\widetilde{V}_{jk}^A(a_i), \rho, V_{jk\,\max}^A) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{C.23}$$

gdzie Φ zdefiniowane jest zależnością (A.23). Dla obu rodzajów progów KD wyznaczymy z zależności

$$KD_{AB}^{LNWP} = \max_j KD_{Bj}, \tag{C.24}$$

jeśli założymy optymizm względem decyzji operatora B, lub

$$KD_{AB}^{LNWP} = \min_j KD_{Bj}, \tag{C.25}$$

jeśli założymy wersję pesymistyczną.

C.8 SQ i KD dla kryterium SNWP

Kryterium SNWP (punkt A.2.3 w dodatku A) jest swoistą hybrydą kryterium LNWP i Laplace'a. Kryterium SNWP wprowadza dwa progi uznania ρ - względny i bezwzględny. I tak dla bezwzględnego progu uznania ρ otrzymamy

$$SQ_A^{SNWP} = \max\{\sum_{j,k} V_{jk}^A(a_i) \cdot \Phi(\widetilde{V}_{jk}^A(a_i), \rho) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{C.26}$$

$$KD_{ABj}^{SNWP} = \max\{\sum_{k} V_{jk}^A(a_i) \cdot \Phi(\widetilde{V}_{jk}^A(a_i), \rho) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{C.27}$$

gdzie Φ zdefiniowane jest zależnością (A.22), natomiast dla progu względnego otrzymamy

$$SQ_A^{SNWP} = \max\{\sum_{j,k} V_{jk}^A(a_i) \cdot \Phi(\widetilde{V}_{jk}^A(a_i), \rho, V_{kj\,\max}^A) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{C.28}$$

$$KD_{ABj}^{SNWP} = \max\{\sum_k V_{jk}^A(a_i) \cdot \Phi(\widetilde{V}_{jk}^A(a_i), \rho, V_{kj\max}^A) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{C.29}$$

gdzie Φ zdefiniowane jest przez równanie (A.23). Dla obu rodzajów progów KD wyznaczymy z zależności

$$KD_{AB}^{LNWP} = \max_j KD_{Bj}, \tag{C.30}$$

jeśli założymy optymizm względem decyzji operatora B, lub

$$KD_{AB}^{LNWP} = \min_j KD_{Bj}, \tag{C.31}$$

jeśli założymy wersję pesymistyczną.

C.9 SQ i KD dla kryterium EWP

Dla kryterium maksymalizacji wartości oczekiwanej wypłaty z progiem uznania - EWP (punkt A.2.4 w dodatku A) SQ liczyli będziemy zgodnie z zależnością

$$SQ_A^{EWP} = \max\{\frac{1}{J \cdot K}\sum_{j,k} V_{jk}^A(a_i) \cdot \Psi(V_{jk}^A(a_i), v) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{C.32}$$

gdzie Ψ zdefiniowane jest równaniem (A.28), a J oraz K oznaczają odpowiednio liczbę strategii operatora B i C. Wartość wypłaty przy znajomości decyzji b_j operatora B wyznaczymy z zależności

$$KD_{ABj}^{EWP} = \max\{\frac{1}{K}\sum_k V_{jk}^A(a_i) \cdot \Psi(V_{jk}^A(a_i), v) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{C.33}$$

Ponieważ kryterium EWP jest kryterium wartości oczekiwanej, zatem

$$KD_{AB}^{EWP} = \frac{1}{J}\sum_j KD_{ABj}^{EWP} \tag{C.34}$$

uzasadnionym jest również zastosowanie progu uznania także dla wyznaczenia KD, stąd alternatywną wersją dla (C.34) będzie

$$KD_{AB}^{EWP} = \frac{1}{J}\sum_j KD_{ABj}^{EWP} \cdot \Psi(KD_{ABj}^{EWP}, v) \tag{C.35}$$

C.10 SQ i KD dla kryterium ESP

Dla kryterium minimalizacji wartości oczekiwanej straty z progiem uznania - ESP (punkt A.2.5 w dodatku A) SQ wyznaczymy z zależności

$$SQ_A^{ESP} = \min\{\frac{1}{J \cdot K}\sum_{j,k} \widetilde{V}_{jk}^A(a_i) \cdot \Psi(\widetilde{V}_{jk}^A(a_i), v) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{C.36}$$

gdzie Ψ zdefiniowane jest równaniem (A.28), a J oraz K oznaczają odpowiednio liczbę strategii operatora B i C. Wartość wypłaty przy znajomości decyzji b_j operatora B wyznaczymy z zależności

$$KD_{ABj}^{ESP} = \min\{\frac{1}{K}\sum_k \widetilde{V}_{jk}^A(a_i)\cdot\Psi(\widetilde{V}_{jk}^A(a_i), v) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{C.37}$$

Poprzez analogię do kryterium EWP, KD dla kryterium ESP wyznaczymy z zależności

$$KD_{AB}^{ESP} = \frac{1}{J}\sum_j KD_{ABj}^{ESP} \tag{C.38}$$

lub też przy uwzględnieniu progu uznania v z zależności

$$KD_{AB}^{ESP} = \frac{1}{J}\sum_j KD_{ABj}^{ESP}\cdot\Psi(KD_{ABj}^{ESP}, v). \tag{C.39}$$

Wartość progu v w zależności (C.39) nie musi przyjmować tej samej wartości, co w zależnościach (C.36) i (C.37).

C.11 SQ i KD dla kryterium PEW

Dla kryterium maksymalizacji progowej wartości oczekiwanej - PEW (punkt A.2.6 w dodatku A) SQ wyznaczymy zgodnie z zależnością

$$SQ_A^{PEW} = \max\{\frac{1}{L\cdot J\cdot K}\sum_l\sum_{k,j} V_{jk}^A(a_i)\cdot\Psi(V_{jk}^A(a_i), l\cdot v) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{C.40}$$

gdzie Ψ zdefiniowane jest równaniem (A.28), L oznacza liczbę rozpatrywanych wartości progu $l \cdot v$, natomiast J oraz K oznaczają odpowiednio liczbę strategii operatora B i C. Wartość wypłaty przy znajomości decyzji b_j operatora B wyznaczymy z zależności

$$KD_{ABj}^{PEW} = \max\{\frac{1}{L\cdot K}\sum_l\sum_k V_{jk}(a_i)\cdot\Psi(V_{jk}(a_i), l\cdot v) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{C.41}$$

Wartość współczynnika KD otrzymamy z zależności

$$KD_{AB}^{PEW} = \frac{1}{L\cdot J}\sum_l\sum_j KD_{ABj}^{PEW}\cdot\Psi(KD_{ABj}^{PEW}, l\cdot v). \tag{C.42}$$

Wartość progu v w zależności (C.42) nie musi przyjmować tej samej wartości, co w zależnościach (C.40) i (C.41).

C.12 SQ i KD dla kryterium PES

Dla kryterium minimalizacji progowej wartości oczekiwanej straty - PES (punkt A.2.7 w dodatku A) współczynnik SQ i KD_{ABj} wyznaczymy z uwzględnieniem względnej wartości progu uznania

$$SQ_A^{PES} = \min\{\frac{1}{L \cdot J \cdot K} \sum_l \sum_{j,k} \widetilde{V}_{jk}^A(a_i) \cdot \Psi(\widetilde{V}_{jk}^A(a_i), l \cdot v, V_{jk\,\max}^A) : i \in \mathcal{I}_A\} \tag{C.43}$$

$$KD_{ABj}^{PES} = \min\{\frac{1}{L \cdot K} \sum_l \sum_k \widetilde{V}_{jk}^A(a_i) \cdot \Psi(\widetilde{V}_{jk}^A(a_i), l \cdot v, V_{jk\,\max}^A) : i \in \mathcal{I}_A\} \tag{C.44}$$

gdzie Ψ zdefiniowane jest równaniem (A.35), L oznacza liczbę rozpatrywanych wartości progu $l \cdot v$, natomiast J oraz K oznaczają odpowiednio liczbę strategii operatora B i C. Wartość współczynnika KD otrzymamy z zależności

$$KD_{AB}^{PES} = \frac{1}{L \cdot J} \sum_l \sum_j KD_{ABj}^{PES} \cdot \Psi(KD_{ABj}^{PES}, l \cdot v, V_{j\,\max}^{A\ \ E}), \tag{C.45}$$

przy czym $V_{j\,\max}^E$ jest wartością średnią z największych wypłat operatora A, dla ustalonej strategii b_j operatora B i kolejnych strategii operatora C

$$V_{j\,\max}^{EA} = \frac{1}{K} \sum_k V_{jk\,\max}^A. \tag{C.46}$$

C.13 SQ i KD dla kryterium WES

Dla kryterium minimalizacji ważonej sumy największej i najmniejszej straty - WES (punkt A.2.8 w dodatku A) współczynniki SQ i KD_{ABj} wyznaczymy zgodnie poniższymi zależnościami

$$SQ_A^{WES} = \min\{\alpha \cdot \min_{j,k} \widetilde{V}_{jk}^A(a_i) + (1-\alpha) \cdot \max_{j,k} \widetilde{V}_{jk}^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{C.47}$$

$$KD_{ABj}^{WES} = \min\{\alpha \cdot \min_{k} \widetilde{V}_{jk}^A(a_i) + (1-\alpha) \cdot \max_{k} \widetilde{V}_{jk}^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{C.48}$$

zaś współczynnik KD z zależności

$$KD_{AB}^{WES} = \alpha \cdot \min_j KD_{ABj}^{WES} + (1-\alpha) \cdot \max_j KD_{ABj}^{WES}. \tag{C.49}$$

C.14 Komentarz

Niewątpliwie przedstawiony tu sposób wyznaczania poszczególnych współczynników obarczony jest pewną arbitralnością. Dotyczy to w szczególności wyznaczania współczynnika KD_{AB}^X. W trakcie jego konstrukcji starano się podtrzymać logikę danego kryterium i tak w różnych przypadkach przyjmowano jedną lub więcej z zależności, służących do jego wyznaczenia, na podstawie znajomości wartości współczynników KD^X_{ABj}. Zależności te korzystały z trzech zasadniczych operatorów min, max i $\sum$ (suma po wszystkich, bądź po wybranych elementach KD^X_{ABj}) w efekcie otrzymując

$$KD^X_{AB} = \min_j KD^X_{ABj}, \tag{C.50}$$

$$KD^X_{AB} = \max_j KD^X_{ABj}, \tag{C.51}$$

$$KD^X_{AB} = \sum_j KD^X_{ABj}. \tag{C.52}$$

Choć każda z powyższych zależności w szczególnych przypadkach dać może inne rozwiązanie, to wydaje się, iż z punktu widzenia wyznaczania wartości informacji w sensie danego kryterium $VI^X_{AB} = |KD^X_{AB} - SQ^X_A|$ użyteczną może być każda z nich.

Dodatek D

Rola informacji o funkcji wypłaty i strategiach konkurencyjnych graczy

Proces podejmowania decyzji bazuje zawsze na informacji dwojakiego rodzaju:

1. Informacje o aktualnym stanie obiektu, którego decyzja dotyczy.
2. Informacja o ewentualnych skutkach, jakie w obiekcie lub wokół niego podjęta decyzja może spowodować.

Informacje pierwszego rodzaju są zwykle decydentom znane. Informacje drugiego rodzaju próbuje się odczytywać z różnego rodzaju prognoz, analiz, symulacji itp.

W sytuacjach growych, gdzie aktualny i przewidywany stan obiektu - wynik gry - wyrażony może zostać w postaci macierzy wypłat, informację dodatkowo podzielić możemy na dwie grupy:

1. Informacja o własnej macierzy wypłat.
2. Informacje o macierzy wypłat pozostałych graczy.

Poszczególni gracze mogą w sposób pełny lub niepełny posiadać informacje tych dwóch typów, lub w szczególnym przypadku którejś z nich nie posiadać w ogóle.

W niniejszym dodatku przyjrzymy się trzem szczególnym sytuacjom implikowanym przez ten podział. Zakładając dla uproszczenia, iż mamy do czynienia z dwoma graczami A i B rozpatrzymy następujące przypadki:

- Gracz A nie zna macierzy gracza B, B nie zna macierzy A (przypadek - NN);
- Gracza A zna macierz gracza B, B nie zna macierzy A lub odwrotnie (przypadek - TN-NT);
- Gracza A zna macierz gracza B, B zna macierz A (przypadek - TT);

D.1 Przypadek - NN

Jako pierwszy rozpatrzymy przypadek NN, czyli sytuację, gdy ani gracz A nie zna macierzy wypłat gracza B, ani gracz B nie zna macierzy wypłat gracza A. Obaj gracze znają swoje własne macierze wypłat. W takiej sytuacji gracze podejmują swoje decyzje w oparciu o analizę wyłącznie własnej macierzy wypłat, kierując się jednym z racjonalnych kryteriów wyboru strategii (patrz dodatek A).

Pierwszym spostrzeżeniem jest, iż w przypadku wielokrotnego powtarzania gry gracze, analizując posunięcia konkurenta, są w stanie odczytać pewne informacje dotyczące jego macierzy wypłat. Ilustruje to poniższy przykład.

Przykład D.1

Załóżmy, że w pierwszej iteracji gry gracz A wybrał swoją strategię a_2, natomiast gracz B strategię b_3 (tabela D.1). W takiej sytuacji gracze otrzymują wypłaty, odpowiednio $V_3^A(a_2)$ i $V_2^B(b_3)$.

Tabela D.1: Odgadywanie postaci macierzy wypłat konkurenta w oparciu o jego decyzje. Iteracja 1.

	b_1	b_2	$\mathbf{b_3}$	b_4
a_1			$\vdots$	
$\mathbf{a_2}$	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$[\mathbf{V_3^A(a_2), V_2^B(b_3)}$	$\ldots\ldots$
a_3			$\vdots$	
a_4			$\vdots$	

Jeśli teraz w kroku drugim gracz A podtrzyma swoją strategię a_2, natomiast w odpowiedzi na to gracz B zmieni na b_2 (tabela D.2), to na podstawie tych dwóch decyzji gracze są w stanie wyciągnąć następujące wnioski:

- Informacja dla gracza A
  Dla gracza B Wypłata $V_2^B(b_3)$ jest raczej gorsza niż wypłata $V_2^B(b_2)$, a najprawdopodobniej, ta ostatnia jest największą z wypłat w drugim wierszu jego macierzy wypłat.

- Informacja dla gracza B
  Wypłata $V_3^A(a_2)$ jest najprawdopodobniej największą z wypłat gracza A w trzeciej kolumnie jego macierzy wypłat.

□

Tabela D.2: Odgadywanie postaci macierzy wypłat konkurenta w oparciu o jego decyzje. Iteracja 2.

	b_1	$\mathbf{b_2}$	b_3	b_4
a_1		$\vdots$		
$\mathbf{a_2}$	......	$[\mathbf{V_2^A}(\mathbf{a_2}), \mathbf{V_2^B}(\mathbf{b_2})$	......	......
a_3		$\vdots$		
a_4		$\vdots$		

W wielu przypadkach uzyskane rozwiązanie równowagowe[1] (jeśli istnieje) nie musi być pareto-optymalne, czego rzecz jasna gracze nie znając macierzy wypłat konkurenta nie będą świadomi. Ilustruje to poniższy przykład.

Przykład D.2

W tabeli D.3 przedstawiono macierz wypłat dla dwu graczy - A i B. Macierz ta posiada dwa rozwiązania równowagowe dla strategii a_2-b_2 i a_1-b_3.

Tabela D.3: Nieoptymalne rozwiązanie gry.

	b_1	b_2	b_3
a_1	[0,0]	[0,2]	$[\mathbf{3}, \mathbf{3}]$
a_2	[0,0]	$[\mathbf{2}, \mathbf{2}]$	[1,1]
a_3	[2,2]	[1,4]	[1,1]

Jeśli w wyniku procesu iteracji gry gracze znajdą się w punkcie wyznaczonym przez strategie a_2-b_2, to najprawdopodobniej żaden z nich w kolejnych iteracjach strategii swojej nie zmieni (byłoby to - przy założeniu niezmienności strategii drugiego - niopłacalne). W tej sytuacji obaj gracze otrzymają wypłatę w wysokości 2. Jest to rozwiązanie nieoptymalne. Obaj skorzystaliby na wyborze strategii a_1 i b_3.

□

[1] Na temat pojęcia równowagi gry patrz przypis 9 w rozdziale 2.

D.2 Przypadek - NT-TN

Rozważmy następnie sytuację, gdy jeden z graczy prócz własnej zna jeszcze macierz wypłat konkurenta. Znajomość macierzy wypłat nie jest, rzecz jasna równoznaczna ze znajomością decyzji, jaką podejmie konkurent, mimo wszystko w szczególnych przypadkach informacja o macierzy wypłat konkurenta może być bardzo przydatna.

Podstawową sytuacją, w której z macierzy wypłat odczytać można potencjalne decyzje lub odrzucić te, które z pewnością nie zostaną wybrane, to sytuacja, gdy któraś ze strategii konkurenta jest *strategią dominującą*. Mówimy, że strategia a_i dominuje strategię a_j wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego k zachodzi zależność (D.1):

$$V_k^A(a_i) \geqslant V_k^A(a_j) \tag{D.1}$$

gdzie $V_k^A(a_i)$ oznacza k-ty element wektora wypłat (wartość funkcji wypłaty danego gracza, dla k-tej strategii gracza konkurencyjnego) odpowiadającego strategii a_i oraz a_j. W takim przypadku strategię a_i nazywać będziemy strategią dominującą strategię a_j. Natomiast strategię a_j będziemy nazywać strategią zdominowaną przez a_i.

Szczególnie atrakcyjną dla danego gracza jest sytuacja, gdy konkurent posiada strategię dominującą jego wszystkie pozostałe strategie. Wówczas znajomość macierzy wypłat byłaby niemalże tożsama ze znajomością decyzji, jaką konkurent wybierze. Niemalże, bowiem jak to w dalszej części wykażemy, wybór strategii dominującej nie zawsze jest najlepszym rozwiązaniem. Okazuje się jednak, że jeśli nawet konkurent posiada strategię dominującą tylko część z jego pozostałych strategii, to świadomość tego faktu może pozwolić danemu graczowi na podjęcie jednoznacznej decyzji, uwzględniającej decyzję konkurenta. Rozważymy to na przykładzie.

Przykład D.3
Macierz wypłat dla graczy A i B przedstawia się, jak w tabeli D.4. Spośród wymienionych w dodatku A kryteriów wyboru strategii (za wyjątkiem kryteriów z progiem uznania, użycie których wskazuje na różne strategie w zależności od przyjętej wartości progu), na strategię a_1 gracza A, jak się później okaże - najlepszą w tej sytuacji, wskazuje jedynie kryterium LNW. Wnioskujemy stąd, że jeśli gracz A, w sytuacji nieznajomości macierzy wypłat gracza B nie kierowałby się tym kryterium, to tej strategii najprawdopodobniej nie wybierze.

Zauważmy, iż strategia b_2 gracza B dominuje tu strategię b_1. Wnioskujemy stąd, że gracz B strategii b_1 raczej nie wybierze. W momencie, gdy gracz A poznaje macierz wypłat gracza B, dowiaduje się równocześnie o tej dominacji. Stąd może uprościć analizę do rozpatrywania tylko sytuacji wyboru przez B strategii b_2 i b_3. W ten sposób macierz wypłat uprościć można do postaci przedstawionej w tabeli D.5. W tak uproszczonej macierzy wypłat strategia a_1 dominuje strategie a_2 i a_3. Tak więc gracz A powinien ją wybrać. □

Tabela D.4: Znajomość strategii dominującej gracza B pozwala graczowi A jednoznacznie wyłonić najlepszą w tej sytuacji swoją strategię.

	b_1	b_2	b_3
a_1	[0,0]	[2, **0**]	[2,2]
a_2	[2,1]	[2, **2**]	[1,2]
a_3	[3,1]	[1, **1**]	[1,0]

Tabela D.5: Uproszczona macierz wypłat.

	b_2	b_3
a_1	[**2**,0]	[**2**,2]
a_2	[2,2]	[1,2]
a_3	[1,1]	[1,0]

Jak to już wyżej zasygnalizowaliśmy, nie zawsze wybór strategii dominującej jest dla danego gracza korzystny. Zilustrujemy to na poniższym przykładzie.

Przykład D.4

Przyjmijmy, iż obaj gracze A i B mają do wyboru tylko dwie strategie. Macierz wypłat dla obu graczy zilustrowano w tabeli D.6. Jak widać strategia a_1 gracza A dominuje jego strategię a_2. Załóżmy, iż gracz A zna macierz wypłat gracza B. Ponadto przyjmijmy, iż gracz A podejmuje jako pierwszy decyzję odnośnie wyboru strategii[2] i decyzja ta będzie znana graczowi B zanim ten podejmie decyzję swoją. W sytuacji, gdy gracz A wybierze swoją strategię dominującą a_1,

Tabela D.6: Wybór strategii dominującej daje w efekcie gorszy wynik.

	b_1	b_2
a_1	[**5**,3]	[**3**,5]
a_2	[4,3]	[2,2]

[2] Wydaje się z pozoru, że skoro gracz A ma strategię dominującą, to nie ma z czym zwlekać i nie powinna być dla niego ważna, decyzja gracza B.

najlepszą odpowiedzią na to ze strony gracza B będzie wybranie strategii b_2. W takim układzie gracz A zapewni sobie wypłatę równą 3, a gracz B wypłatę równą 5. Jeśli natomiast gracz A wybrałby swoją zdominowaną strategię a_2, wówczas najlepszą odpowiedzią gracza B jest wybranie strategii b_1. W tym układzie gracz A otrzymałby wypłatę równą 4, natomiast gracz B równą 3. Widzimy zatem, iż gracz A skorzysta na tym, że nie wybierze swojej strategii dominującej a_1. □

Jeszcze innym przykładem sytuacji, kiedy to strategia dominująca nie przynosi najlepszego wyniku jest tak zwany *Dylemat Więźnia.*

Przykład D.5

Macierz wypłat dla obu graczy przedstawia się jak w tabeli D.7. Zauważmy, iż w tej sytuacji zarówno gracz A, jak i gracz B mają strategie dominujące (a_2 i b_2). Jednakże wybierając je nie uzyskują najlepszego rozwiązania. Znacznie lepiej wypadliby obaj, gdyby wybrali swoje zdominowane strategie a_1 i b_1. Jest to klasyczny przykład sytuacji, kiedy to tzw. *racjonalność indywidualna* i *racjonalność zbiorowa* nie idą w parze. □

Tabela D.7: Dylemat Więźnia.

	b_1	b_2
a_1	[3,3]	[1,**5**]
a_2	[**5**,1]	[$\mathbf{2}, \mathbf{2}$]

Występowanie strategii dominujących w macierzy wypłat konkurenta to przypadek szczególnie atrakcyjny, bowiem w wielu przypadkach pozwala wskazać potencjalną lub odrzucić niebrane pod uwagę jego strategie. Przydatność znajomości macierzy wypłat nie ogranicza się jednakże tylko do przypadku ze strategiami dominującymi. Znajomość macierzy wypłat może się okazać wielce przydatną również w bardziej typowych sytuacjach. Bowiem, jeśli do znajomości macierzy wypłat dołoży się jeszcze znajomość „stylu” gry gracza konkurencyjnego, to z dużym prawdopodobieństwem można przewidzieć jego decyzje nawet wtedy, gdy w jego macierzy brak jest wektorów dominujących[3].

Intuicyjnie rozumiejąc owe pojęcia, możemy przyjąć, że w przypadku, gdy dany gracz zdaje się prowadzić politykę „zachowaczą”, można się spodziewać, iż w swych decyzjach kierował się będzie maksymalizacją minimalnej wypłaty, czyli kryterium Walda. Jeśli zaś jego polityka będzie

[3] Mowa o sytuacji jednoczesnego wyboru.

bardziej „brawurowa”, to można przypuszczać, iż mierzył on będzie w wartości największe, czyli będzie opierał swe decyzje na kryterium Optymistycznym[4].

D.3 Przypadek - TT

Rozważając przypadek obustronnej znajomości macierzy wypłat, staje przed nami interesujące pytanie: „Kiedy leży w interesie gracza A dostarczenie graczowi B informację o swojej macierzy wypłat, ewentualnie o wybranej strategii?”

Innymi słowy próbujemy rozstrzygnąć, która z zależności i kiedy jest prawdziwa:

$$TN > TT \text{ czy } TN < TT$$

Gdzie znak nierówności wskazuje na preferowaną z punktu widzenia gracza A symetrię bądź asymetrię informacyjną. Rozważmy poniższe przykłady.

Przykład D.6

Załóżmy, iż macierz wypłat dla graczy A i B przedstawiają się jak w tabeli D.8. Załóżmy ponadto, iż gracz B musi się ruszyć jako pierwszy.

Tabela D.8: Przykład sytuacji, kiedy opłaca się graczowi A poinformować gracza B o swojej decyzji.

	b_1	b_2
a_1	[3,3]	[0,2]
a_2	[2,0]	[2,2]

W tej sytuacji kryteria Walda, Laplace'a, Hurwicza ($\alpha < \frac{2}{3}$), Savage'a i LNW wskazują graczowi B strategię b_2. Znając jego macierz wypłat i przewidując taką decyzję, gracz A wybierze najprawdopodobniej swoją strategię a_2, co da w wyniku obu graczom wypłatę w wysokości 2. Łatwo zauważyć, że gdyby gracz B wiedział, że gracz A wybierze swoją strategię a_1, to wybrałby swoją strategię b_1, zapewniając tym samym obu graczom wypłatę w wysokości 3.

W tej sytuacji opłaca się więc graczowi A poinformować gracza B o swojej decyzji (gracz B również na tym skorzysta). Zachodzi zatem zależność:

$$TN < TT$$

□

[4] Lub też, co bardziej realne, na kryterium Hurwicza z odpowiednio dużym współczynnikiem optymizmu.

Kolejnym ciekawym przypadkiem jest sytuacja modelowana przez klasyczną już w Teorii Gier grę *Chicken*[5].

Przykład D.7

Niech macierz wypłat dla graczy A i B przedstawia się jak w tabeli D.9.

Tabela D.9: Gra Chicken.

	b_1	b_2
a_1	[3,3]	[2,4]
a_2	[4,2]	[1,1]

Gra zawiera dwie równowagi a_1-b_2 i a_2-b_1, przy czym każdy z graczy chciałby się znaleźć w innej z nich.

Analizując sytuację z punktu widzenia gracza A, wysunąć możemy następujące wnioski:

1. W interesie A jest, aby B był pewny, że A wybierze strategię a_2, niezależnie od tego, jak postąpi B. Ta sytuacja niejako przymusza gracza B do wybrania strategii b_1.
2. Dla A jest lepiej, aby B znał jego decyzję, a nie macierz wypłat. Jeśli gracz B zna jedynie decyzję gracza A, to może przypuszczać, że strategia a_2 jest lepsza dla A również wtedy, gdy B wybierze b_2. Gdyby zaś B znał macierz wypłat A, wówczas miałby silną motywację i naturalne poparcie w postaci macierzy wypłat gracza A, by przeforsować swoją strategię b_2, wymuszając tym samym na A strategię a_1.
3. Gracz A może chcieć zmienić swoją macierz wypłat i poinformować o tym B.

Ostatni z wniosków zilustrujemy na przykładzie. Jeśli gracz A w jakiś sposób (np. poprzez manipulację kosztami świadczenia usług) zmieni swoją macierz wypłat tak, że będzie się ona przedstawiała jak w tabeli D.10, wówczas poinformowanie gracza B o tym fakcie, upewni tego drugiego w przekonaniu, że A wybierze strategię a_2 niezależnie od tego, jak postąpi B. □

D.4 Podsumowanie i wnioski

Powyższa analiza wykazała nam niektóre niebezpieczeństwa i swoiste pułapki racjonalności, jakie czyhają na graczy rynkowych w sytuacji ograniczeń informacyjnych związanych z nieznajomością macierzy wypłat graczy konkurencyjnych. Podstawowym niebezpieczeństwem jest tu

[5] Nazywana w języku polskim „grą w tchórza” [182].

Tabela D.10: Zmodyfikowana macierz wypłat gracza A, w celu wymuszenia na graczu B korzystnej dla A strategii - b_1.

	b_1	b_2
a_1	[3,3]	[0,4]
a_2	[**4**,2]	[**1**,1]

możliwość uzyskania nieefektywnego rozwiązania gry (patrz przykład D.2), czego ani przedsiębiorstwa telekomunikacyjne, ani regulator rynku mogą być nieświadomi. Sytuacja taka może być tym bardziej zaskakująca, że nieefektywne rozwiązanie gracze uzyskać mogą kierując się najlepiej pojętym interesem własnym, wybierając własne dominujące strategie (patrz przykład D.4). Ponadto struktura samego problemu, sprzyjać może rozwiązaniom nieefektywnym, jak to jest w przypadku gry *dylemat więźnia* (patrz przykład D.5). W takiej sytuacji uzyskanie rozwiązania efektywnego wymaga zmiany samej struktury gry tak, by gracze kierując się własnym interesem doprowadzali w efekcie do tych rozwiązań. Dokonać się to może poprzez odpowiednie regulacje prawne, ograniczające zbiór możliwych strategii do takich, które uniemożliwią osiągnięcie nieefektywnych rozwiązań równowagowych. Ta sytuacja wymaga jednakże całościowego spojrzenia na sytuację rynkową, z uwzględnieniem modelu popytu i modelów kosztów wszystkich graczy. Rodzi to pytanie, czy nie byłoby w tej sytuacji słusznym podejście, stosowane przykładowo na rynku energii elektrycznej, gdzie odstępuje się od klasycznych rynków transakcji bilateralnych na rzecz jednego rynku, globalnie bilansującego zgłaszane oferty podaży i popytu [121, 161]?

Odpowiedź na pytanie, czy lepiej dla danego gracza jest, gdy konkurent zna jego macierz wypłat czy nie, nie jest jednoznaczna. Bywają sytuacje, kiedy symetria informacyjna (TT) jest układem najkorzystniejszym (patrz przykład D.6). W innych przypadkach bardziej korzystną może być asymetria (TN) (patrz przykład D.7), z ewentualną korzyścią płynącą z faktu poinformowania konkurenta nie tyle o strukturze własnej macierzy wypłat, co o planowanej decyzji. W sytuacjach, gdy obaj gracze znają swoje macierze wypłat, a gra posiadać będzie kilka sytuacji równowagowych, niejednakowo korzystnych dla każdego z nich, dochodzić może do eskalacji konfliktu (patrz przykład D.7), co w praktyce objawiać się może poprzez przedłużające się negocjacje odnośnie połączeń międzysieciowych lub wojny cenowe na rynkach detalicznych. W sytuacjach takich gracze mogą dążyć do wzmocnienia wiarygodności przekazywanej sobie nawzajem informacji, dotyczącej potencjalnie wybranej strategii, lub jej utrzymania w dłuższej perspektywie poprzez manipulację strukturą kosztów świadczenia poszczególnych usług.

Zdobycie informacji o macierzy wypłat graczy konkurencyjnych wiąże się zawsze z pewną ceną, którą trzeba za to zapłacić. Problem ten jest o tyle istotny, iż o rzeczywistej wartości informacji przekonać się można dopiero po jej nabyciu. Gracze mają zatem do wyboru albo pozostać w sytuacji istniejących ograniczeń informacyjnych, próbując odczytywać pewne istotne własności macierzy wypłat konkurentów na podstawie analizy ich wcześniejszych decyzji (patrz przykład D.1), lub też ryzykować i ponosząc stosowną cenę, ograniczenia te pokonywać. Choć to drugie rozwiązanie nie musi doprowadzić do jednoznacznego wskazania strategii, jaką wybierze konkurent, to może jednakże znacząco ograniczyć liczbę strategii, jakie warto rozpatrywać (patrz przykład D.3).

W ogólności stwierdzić należy, iż dla każdego z graczy korzystnym jest, by wiedział jak najwięcej tak o własnej macierzy wypłat, jak też o macierzy wypłat konkurenta. To, która z sytuacji TT czy też TN dla danego gracza jest korzystniejsza, wynika już bezpośrednio ze struktury samej macierzy i odpowiedź jednoznaczna dla wszystkich przypadków jest niemożliwa.

Dodatek E

Obliczanie rozmiaru macierzy wypłat

W niniejszym dodatku ilustrujemy sposób obliczania rozmiaru macierzy wypłat w zależności od liczby jednostek usługowych, liczby poziomów cenowych, które przyjmować może cena za każdą z jednostek, oraz w zależności od liczby graczy, biorących udział w grze rynkowej. Liczbę jednostek usługowych $NoSU$ (*Number of Service Unit*), przy założeniu, że pojedyncza jednostka związana jest z usługą u, świadczoną użytkownikowi o profilu p, w dniu tygodnia n i okresie czasowym t, wyznaczymy z zależności:

$$NoSU = |Profil| \cdot |Service| \cdot |Time| \cdot |Day|, \tag{E.1}$$

gdzie:

$\|Profil\|$	-	liczba profili użytkowników,
$\|Service\|$	-	liczba świadczonych usług,
$\|Time\|$	-	liczba okresów taryfikacyjnych,
$\|Day\|$	-	liczba wyszczególnionych rodzajów dni.

Jeżeli oznaczymy przez K liczbę dopuszczalnych poziomów cenowych dla każdej jednostki usługowej, to liczbę strategii $NoStr$ dla każdego z graczy wyznaczymy z zależności:

$$NoStr = K^{NoSU} \tag{E.2}$$

Jeśli NoO oznaczać będzie liczbę graczy, to liczbę elementów w macierzy wypłat NoV wyznaczymy z zależności:

$$NoV = NoO \cdot NoStr \tag{E.3}$$

W tabeli E.1 przedstawiliśmy przykładowe obliczenia. Jak to przedstawiają wyniki w niej zamieszczone, rozmiar macierzy wypłat dla względnie realnego przypadku (20 usług, 3 okresy czasowe, 2 rodzaje dni, 4 profile abonentów) jest na tyle duży, że uniemożliwia analizę. Sytuację w miarę akceptowalną uzyskujemy w przypadku analizy 10 jednostek usługowych z trzema

Tabela E.1: Tabela ilustrująca liczbę strategii i elementów macierzy wypłat dla różnej liczby jednostek usługowych.

$\|Service\|$	20	2	
$\|Time\|$	3	2	
$\|Day\|$	2	2	
$\|Profil\|$	4	2	
NoSu	**480**	**16**	**10**
K	3	3	3
NoStr	**1.04e229**	**43mln**	**59.049**
NoO	3	3	3
NoV	**?**	**7.98e22**	**205mld**

poziomami cen i trzema operatorami. Z praktycznego punktu widzenia należy stwierdzić, iż model gry w postaci macierzowej dla sytuacji konkurencji między przedsiębiorstwami telekomunikacyjnymi stanowić może dobre narzędzie jedynie dla wyjątkowo prostych sytuacji z małą liczbą graczy i małą liczbą oferowanych przez nich jednostek usługowych. Dla przypadków bardziej skomplikowanych należy stosować podejście oparte na metodach optymalizacji ciągłej [149].

Dodatek F

Modelowanie popytu na usługi telekomunikacyjne

F.1 Definicje i podstawowe pojęcia

F.1.1 Ogólna definicja pojęcia popytu

Powszechne rozumienie pojęcia *popyt* nie jest zgodne z jego ścisłą definicją. Przyjęło się, nawet w literaturze ekonomicznej, używanie tego pojęcia w znaczeniu tzw. *wielkości zapotrzebowania*. Choć z reguły nie wpływa to niekorzystnie na rozumienie zasadniczych treści, które z użyciem tego pojęcia są przekazywane, to uznajemy za stosowne, aby w tym tekście pojęciu temu, choć na chwilę, przywrócić znaczenie ścisłe. I tak, zgodnie z definicją podawaną przez Begga [8], popyt – D mówi nam, jaką ilość dobra nabywca jest gotów zakupić przy danej wysokości ceny oraz jak zmieni się ta ilość wraz ze zmianą ceny. Popyt zatem oprócz wyrażania pewnych wielkości, wyraża jednocześnie pewien związek: cena – ilość. Owe uściślenie ma na celu jedynie sygnalizację pewnej nieprecyzyjności języka potocznego, jak również świadomości autora tej nieprecyzyjności istnienia. W dalszej części tekstu używali będziemy tego pojęcia w obu znaczeniach – potocznym i ścisłym ufając, iż kontekst, w jakim będą one używane, będzie kluczem do jednoznacznego ich rozróżnienia.

F.1.2 Definicja pojęcia usługi telekomunikacyjnej

W literaturze znaleźć możemy wiele rodzajów klasyfikacji usług telekomunikacyjnych [17, 36, 56, 72, 75, 83, 90, 92, 123, 124, 188]. Wybór jednej z nich uzasadniony jest w każdym przypadku celem, jaki chce się osiągnąć. Patrząc na owo zagadnienie w punktu widzenia działalności biznesowej, cel ten jest zwykle bardzo złożony. Stąd też w zależności od tego, na co położy się największy nacisk, co uczyni głównym obszarem zainteresowania, otrzymuje się rożne, niekoniecznie rozłączne podziały. Dość często, formułując ów cel na plan pierwszy wysuwają się jego dwa istotne, acz nie jedyne[1] elementy – *zysk* i *udział w rynku*. O ile pierwszy z elementów – zysk, wydaje się być pojęciem jednoznacznym, o tyle pojęcie udziału w rynku jest już samo w sobie pojęciem złożonym i różnorodnie można je definiować (np. ze względu na zysk, na liczbę abonentów, na popyt na poszczególne usługi, na obszar (w sensie geograficznym) objęty działalnością itd.). Stąd wniosek, iż już samo sformułowanie celu nie jest zadaniem prostym, a co więcej, cel ów nie musi być trwały, może ulegać transformacjom, może się zmieniać. Wypada zatem na obecną chwilę przyjąć jego najbardziej ogólną postać, taką, która zawierałaby w sobie wszystkie możliwe „pod-cele". Ta ogólna postać celu niejako wymusza ogólną definicję pojęcia usługi[2].

Definicja F.1.1 *Usługą telekomunikacyjną nazywamy fragment rzeczywistości związanej z działalnością operatorów telekomunikacyjnych, w którym z subiektywnie rozumianą korzyścią i ponoszeniem właściwych kosztów, rozumianych jako opłata za tę usługę, uczestniczyć mogą użytkownicy.*

Zgodnie z definicją F.1.1, usługami będą tak zarówno „typowe" usługi telekomunikacyjne, takie jak: połączenia telefoniczne, transmisja danych, usługi o wartości dodanej itp., jak również samo dołączenie do sieci, aktywacja poszczególnych usług, czy wreszcie nabycie terminala końcowego.

[1] „Biznes należy zatem zdefiniować wpierw jako poczucie przynależności do wspólnoty i poczucie celu, jakim jest zaspokojenie popytu, co łączy się ściśle z wprowadzaniem innowacyjnych produktów, oszczędnością materiałów, mniejszym zużyciem energii i mniejszą emisją środków szkodliwych dla środowiska. W sumie celem jest lepszy, bliższy, bardziej «zażyły» kontakt z klientem. Konkurencja jest czymś wtórnym, gwarantującym jakość usług i produktu, lecz nie jest żadnym celem życia gospodarczego. Z kolei warunkiem funkcjonowania firmy są zyski, lecz – paradoksalnie – zysk jako zysk nie może być uważany za cel. Odgrywa on raczej rolę informacji o prawidłowym funkcjonowaniu przedsiębiorstwa." Józef Sójka „Etyka Biznesu. W poszukiwaniu strategii nauczania.", artykuł zamieszczony w pracy [34].

„Celem zaś przedsiębiorstwa nie jest po prostu wytwarzanie zysku, ale samo jego istnienie jako *wspólnoty ludzi*, którzy na różny sposób zdążają do zaspokojenia swych podstawowych potrzeb i stanowią szczególną grupę służącą całemu społeczeństwu. Zysk nie jest jedynym regulatorem życia przedsiębiorstwa; obok niego należy brać pod uwagę *czynniki ludzkie i moralne*, które z perspektywy dłuższego czasu okazują się przynajmniej równie istotne dla życia przedsiębiorstwa." [70].

[2] Usługę rozumieć można jako produkt finalny, oferowany użytkownikom. Wprowadzone w rozdziale 2 pojęcie *jednostki usługowej* dotyczyło elementów związanych z procesem świadczenia usług, za które pobierana była opłata. Różnicę pomiędzy usługą, a jednostką usługową zilustrować można na przykładzie połączenie telefonicznego pomiędzy abonentami dwóch sieci. W sensie wprowadzonych definicji usługą jest tu połączenie, które składa się z dwóch jednostek usługowych: rozpoczęcia połączenia w jednej sieci i zakończenia połączenia w drugiej sieci. Użytkownicy widzą usługi w jej formie finalnej, podczas gdy operatorzy skupiają swą uwagę na jednostkach usługowych.

Oligopolistyczna forma rynku telekomunikacyjnego nie pozwala nam jednakże na pozostanie przy tak ogólnej definicji. Nie wystarczy bowiem, zajmując się procesem modelowania popytu, stwierdzić, czy użytkownik korzysta z danego typu usługi, więcej, nie wystarczy nawet ilościowe wyrażenie tego faktu, jeśli taki ma miejsce. Pojawia się bowiem istotny problem wskazania podmiotu-przedsiębiorstwa, które tę usługę świadczy. Mając to na uwadze wprowadzimy poniższe definicje.

Definicja F.1.2 *Teleusługami nazywamy wszystkie usługi, które dane przedsiębiorstwo telekomunikacyjne zaoferować może „swojemu[3]" abonentowi.*

Definicja F.1.3 *Usługą dołączenia do sieci nazywać będziemy usługę związaną z wyborem przedsiębiorstwa telekomunikacyjnego, z którego usług będzie się korzystać (w ramach tej usługi przedsiębiorstwo niejako świadczy same siebie).*

F.1.3 Popyt na usługi telekomunikacyjne

Rozważania nad popytem na usługi telekomunikacyjne zakorzenić można i – jak dalsza analiza wykaże – trzeba w obu rodzajach usług: dołączania do sieci (def. F.1.3) i korzystania z teleusług (def. F.1.2). Problem formułują poniższe pytania:

1. Jak zmieni się liczba abonentów dołączonych do sieci wraz ze zmianą ceny aktywacji (w sensie dołączenia do sieci jak również w sensie udostępnienia pewnego zbioru teleusług), wraz ze zmianą wysokości abonamentu, czy wreszcie wraz ze zmianą taryfy za poszczególne teleusługi itd.?

2. Jak zmieni się zapotrzebowanie na poszczególne teleusługi wraz ze zmianą ich ceny?

Odpowiedź na pytanie pierwsze jest swoistą pochodną odpowiedzi na pytanie drugie, bowiem wraz ze zmianą cen teleusług zmienia się zarówno popyt na nie, co nazwać możemy *zmianą poziomu penetracji sieci*, jak również (w szczególnych przypadkach) liczba abonentów sieci (dołączają się nowi lub część odchodzi do konkurencyjnych operatorów, czy też w ogóle zaprzestaje korzystania z tego typu usług). Zależność pomiędzy popytem a ceną wydaje się być bardziej silna (popyt bardziej elstyczny) w przypadku teleusług. To dość oczywiste. W przeciwieństwie do usług aktywacji (dezaktywacji), gdzie zmiana popytu równoważna jest wyborowi „być albo nie być" abonentem sieci (ewentualnie korzystać, nie korzystać z danej teleusługi), dla teleusług zmiana popytu równoznaczna jest ze zmianą wielkości ruchu generowanego, co odwzorować można w nieskończony zbiór wartości.

[3] Chwilowo poprzestaniemy na intuicyjnym rozumieniu tego pojęcia.

Doświadczenia światowe pokazują [3, 4, 145, 166, 167, 168], że wpływ przywiązania się abonenta do operatora jest częstokroć o wiele silniejszy aniżeli wpływ obniżek cen u operatorów konkurencyjnych i nawet przy względnie dużych różnicach cen (nawet do 20%), abonenci nie są skłonni opuszczać dotychczasowego operatora, na rzecz konkurenta. Jednakże pominięcie tego elementu w rozważaniach na temat popytu na usługi telekomunikacyjne w dobie, gdy tak istotną staje się walka konkurencyjna o pozyskanie jak największej liczby abonentów, byłoby uproszczeniem zbyt silnym.

F.1.4 Jednostki miary popytu

Aby wyrazić wielkość popytu na usługę należy określić odpowiednią jednostkę miary. W przypadku usług dołączenia do sieci w sposób oczywisty nasuwa się myśl wyrażania wielkości popytu w formie liczby abonentów. Rzecz ma się podobnie w przypadku pewnego zbioru teleusług takich, jak np. identyfikacja numeru abonenta nawiązującego połączenie. Jednym słowem wszędzie tam, gdzie wszelka informacja na temat wielkości wyświadczenia usługi sprowadza się do stwierdzenia, czy usługa ta została wyświadczona, czy też nie (zero-jedynkowy zbiór wartości), wielkość popytu na tą usługę może być wyrażana liczbą użytkowników z niej korzystających.

Nieco inaczej rzecz ma się w przypadku pozostałych teleusług. W telekomunikacji przyjęło się dwa zasadnicze sposoby określania wielkości świadczenia tego typu usług:

1. Czas zajętości zasobów sieciowych;

2. Wielkość kierowanego do (odbieranego z) sieci ruchu - inaczej wielkość ruchu generowanego.

W związku z tym wyróżnić można odpowiednio:

1. Opłatę za czas trwania połączenia;

2. Opłatę za wielkość przesyłanych danych.

Oba sposoby sprowadzić można na ten sam grunt analizy poprzez generowanie i zliczanie impulsów taryfikacyjnych, których liczba koresponduje odpowiednio z czasem trwania połączenia, oraz z ilością przesyłanych danych. Jeden impuls równoważny jest wówczas jednostce taryfikacyjnej.

Całkowita liczba wygenerowanych przez abonenta impulsów nie odzwierciedla jednakże pełni użytecznych dla operatorów informacji. Popyt, rozumiany jako całkowita wielkość ruchu generowanego przez abonenta (całkowita liczba impulsów), to w rzeczywistości iloczyn liczby nawiązanych połączeń – C i średniej liczby impulsów przypadających na to połączenie – T (średniego czasu trwania połączenia, średniej wielkości przesłanych danych). To rozróżnienie może być w niektórych przypadkach bardzo pożyteczne.

Rozpatrzmy dla ustalenia uwagi usługę połączenia telefonicznego, w ramach której zwykle impulsy taryfikacyjne naliczane są według odpowiedniej proporcji do czasu trwania połączenia. W sytuacji, gdy operatorzy nie pobierają dodatkowych opłat za samo nawiązanie połączenia oraz okres czasowy związany z jednostką taryfikacyjną jest względnie krótki, operatorom bardziej zależy na tym, by wzrastał czynnik czasowy T niż związany z liczbą nawiązanych połączeń – C. Zmniejsza to prawdopodobieństwo blokady, ilość zużywanej energii, częstość angażowania urządzeń sieciowych, związanych z nawiązywaniem połączenia, zmniejsza ilość ruchu sygnalizacyjnego. Natomiast w sytuacji, gdy pobierane są dodatkowe opłaty za nawiązanie połączenia lub okres czasowy związany z jednostką taryfikacyjną jest względnie długi, operatorzy mogą być bardziej zainteresowani wzrostem liczby nawiązywanych połączeń C niż wydłużeniem średniego czasu ich trwania T, bowiem taki stan rzeczy byłby dla nich atrakcyjny z punktu widzenia korzyści finansowych. Analogiczne rozważania można przeprowadzić przy założeniu, iż pobierane są opłaty za wielkość przesyłanego ruchu, a nie za czas trwania połączenia.

Z powyższego wnioskujemy, iż wskazane jest wprowadzenie dwóch dodatkowych jednostek miary. I tak popyt w sensie C wyrażany będzie liczbą nawiązanych połączeń, natomiast popyt w sensie T – liczbą impulsów taryfikacyjnych.

F.1.5 Rodzaje abonentów

Podobnie, jak rzecz się ma w przypadku usług, abonentów[4] sieci telekomunikacyjnej można w różnorodny sposób klasyfikować. Dość powszechnie przyjmuje się podziały typu:

- biznesowi – domowi
- miejscy – wiejscy
- hurtowi – detaliczni

Podziały tego typu mogą być bardziej zróżnicowane. I tak moglibyśmy podzielić przykładowo abonentów biznesowych na mniejsze podgrupy typu: abonenci prowadzący małą, średnią, dużą, czy wreszcie bardzo dużą firmę. Dowolna kombinacja tego typu podziałów (np. średnio-biznesowy – miejski – detaliczny) składa się na swoisty profil abonenta, który oznaczać będziemy jako p.

W kontekście modelowania popytu wskazany jest taki podział abonentów na grupy o określonym profilu, który spełniał będzie dwa następujące aksjomaty:

[4] W nowym prawie telekomunikacyjnym Wspólnoty Europejskiej pojęcie „abonent” (*subscriber*) stanowi szczególny przypadek bardziej ogólnego pojęcia „użytkownik” (*user*) i oznacza „osobę fizyczną lub osobę prawną, która jest stroną umowy o świadczenie publicznych usług łączności elektronicznej zawartej z dostawcą usług” [138].

A. 1 *Abonenci o tym samym profilu charakteryzują się względnie podobnym stosunkiem do oferowanych usług oraz związanych z nimi cen.*

A. 2 *Abonenci o różnych profilach charakteryzują się względnie różnym stosunkiem do oferowanych usług i związanych z nimi cen.*

Aksjomat A.1 gwarantuje nam, iż popyt abonentów o tym samym profilu będzie mógł być opisany w formie tego samego modelu. Natomiast aksjomat A.2. gwarantuje nam, iż nie będziemy tworzyć dwóch modeli dla grupy abonentów, których zachowanie opisać można poprzez budowę modelu tylko jednego.

Powyższy podział abonentów na profile wynikał wprost i jedynie z samej – jakby rzec można – „natury" abonenta. Ze względu na proces modelowania popytu[5] wyróżnić można jeszcze jeden istotny podział, tym razem wynikający z „natury" operatora (ogólniej – dostawcy usługi), a ściślej rzecz biorąc z zasady, na której abonent korzysta z jego usług. Zauważmy, iż nie „w ten sam sposób" jest się abonentem np. sieci lokalnej i sieci międzystrefowej. W przypadku pierwszym z reguły abonent jest w ramach danego przedziału czasowego, określonego umową zawartą z operatorem na stałe z tym operatorem związany [6]. W przypadku drugim, abonent nie jest związany z operatorem. Może tak samo dobrze korzystać z jego usług, jak i usług operatorów konkurencyjnych i wyboru takiego dokonywać może każdorazowo, przy każdym nowo realizowanym połączeniu. Można by rzec, że tu abonent należy tak samo do wszystkich jak i do nikogo.

Powyższe rozważania uzasadniają wprowadzenie kolejnych definicji.

Definicja F.1.4 *Abonentem operatora nazywamy użytkownika, związanego z danym operatorem okresową umową.*

Definicja F.1.5 *Abonentem usługi nazywamy użytkownika posiadającego względnie równorzędny dostęp do podobnych usług co najmniej dwóch operatorów.*

Przykładem abonentów operatora (Def. F.1.4) są abonenci sieci GSM lub też abonenci sieci lokalnych bez możliwość korzystania z usług typu *Carrier Selection* [53]. Przykładem abonentów usługi (Def. F.1.5) są abonenci operatorów międzystrefowych lub też strefowych (lokalnych) z usługą *Carrier Selection.*

[5] Jak to dalsza część tekstu wykaże, dotyczy to w szczególności tworzenia modelu liczby abonentów.

[6] W rozumieniu nowego prawa telekomunikacyjnego, tylko tych użytkowników nazywać można w sensie ścisłym „abonentami" [138, 140].

F.2 Modele składowe i determinanty zmienności popytu

W sposób ogólny model popytu wyrazić możemy w postaci transformacji Y, która wektorowi $\mathbf{x}$ – *wektorowi zmiennych wejściowych determinujących popyt* przyporządkowuje wektor $\mathbf{y}$, który będziemy nazywać *wektorem zmiennych wyjściowych popytu*.

$$\mathbf{y} = Y(\mathbf{x}) \tag{F.1}$$

Wektory $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ są elementami pewnych zbiorów $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$, które wyrażają odpowiednio zbiór wszystkich czynników determinujących zmienność popytu i zbiór wszystkich zmiennych wyjściowych popytu. Nie jest wcale oczywistą odpowiedź na pytanie, czy są to zbiory o skończonej liczbie wymiarów[7]. Z konieczności jednakże w praktyce wybrać musimy z tego zbioru konkretne wektory o skończonej liczbie wymiarów. Należy mieć zatem świadomość, iż zawsze jest to związane z pewną arbitralnością, subiektywną oceną modelowanej sytuacji i jej uproszczeniem.

F.2.1 Modele składowe

Przyjmijmy, iż wektor wyjść $\mathbf{y}$ składał się będzie z trzech grup składowych, które nazywać będziemy *modelami składowymi*. Każdy z modeli składowych służył będzie wsparciu w fazie odpowiedzi na jedno z trzech pytań:

P. 1 *Jak zmieni się wielkość popytu na daną teleusługę (wyrażona w odpowiednich dla niej jednostkach miary) wraz ze zmianą wartości zmiennych wejściowych determinujących popyt –* $\mathbf{x}$*?*

P. 2 *Jak zmieni się rozpływ ruchu w sieci przy zmianie wartości poszczególnych składowych wektora* $\mathbf{x}$*?*

P. 3 *Jak zmieni się liczba abonentów operatora przy zmianie wartości składowych wektora* $\mathbf{x}$*?*

Modele te nazywać będziemy odpowiednio:

- modelem funkcji popytu (P.1),
- modelem rozpływu ruchu (P.2),
- modelem liczby abonentów (P.3).

[7] Liczba elementów tych zbiorów (liczba wektorów dla określonej liczby wymiarów) należy niewątpliwie do zbioru nieskończonego.

F.2.2 Determinanty zmienności popytu

Popyt na usługi telekomunikacyjne zależy od wielu czynników - zmiennych wejściowych $\mathbf{x}$. W dalszej części tego punktu rozważymy następujące:

- cena danej usługi
- ceny usług komplementarnych
- ceny usług substytucyjnych
- wielkość dochodu abonentów
- liczba abonentów (z uwzględnieniem ich profilu, gęstości telefonicznej)
- wizerunek (prestiż) operatora
- odległość między strefą źródłową i docelową.
- czas (w sensie pory dnia) świadczenia usługi
- dzień tygodnia
- gusta użytkowników

Cena danej usługi

Ekonomia dla potrzeb wyrażenia zmiany popytu D (*Demand*) na daną usługę (dobro, towar) w zależności od zmiany ceny P (*Price*), wprowadza pojęcie *elastyczności cenowej popytu* (elastyczność popytu względem ceny) ϵ [8, 25]. Matematycznie zależność ta wyraża się poniższym równaniem różniczkowym:

$$\frac{\frac{dD}{D}}{\frac{dP}{P}} = -\epsilon \tag{F.2}$$

Zdefiniowany równaniem (F.2) współczynnik elastyczności cenowej popytu wyraża zależność względnej szybkości zmiany popytu na dana usługę od względnej szybkości zmiany ceny jej świadczenia. Znak minus sugeruje, iż wraz ze wzrostem ceny P, popyt D na usługę będzie malał. Jest to zgodne z intuicyjnym wyobrażeniem zachowania się racjonalnego abonenta.

W zależności od tego, w jakich granicach mieści się wartość ϵ przyjęło się określać popyt jako:

- *elastyczny* – zmianom ceny o 1% odpowiada zmiana popytu o więcej niż 1% ($|\epsilon|$ większe od 1)

- *nieelastyczny* – zmianom ceny o 1% odpowiadają zmiany popytu o mniej niż 1% ($|\epsilon|$ zawiera się w przedziale od 0 do 1).

Im większą (bezwzględną) wartość posiada ϵ, tym silniej na zmianę ceny reagował będzie popyt.

Z praktycznego punktu widzenia można przyjąć, że elastyczność cenowa popytu jest wielkością charakterystyczną dla każdego abonenta, jak również – jako ważona wartość średnia – dla większych grup abonentów, a w szczególności dla całego rynku. Przy niezmienności takich czynników, jak gusta i upodobania abonentów, oraz przy określonej łatwości zastąpienia danej usługi inną o podobnym przeznaczeniu, a także zakładając względnie nieduże zmiany ceny rozpatrywanej usługi można założyć, iż elastyczność cenowa popytu jest wartością stałą. Wówczas rozwiązując[8] równanie (F.2) otrzymamy prostą postać funkcji popytu:

$$D = \overline{D} \cdot \left(\frac{\overline{P}}{P} \right)^{\epsilon} \tag{F.3}$$

Taką postać funkcji popytu, przy interpretacji $\overline{D}$ jako popytu średniego i $\overline{P}$ jako średniej ceny (uśrednienie po abonentach) zaproponowano w pracy [1]. Elastyczność cenowa popytu nazwana tam została *stałą popytu*.

Jest to postać prosta, przejrzysta i intuicyjnie zrozumiała. Wadą jej jest jednak silnie ograniczające założenie stałości elastyczności cenowej popytu ϵ w całym zakresie zmienności cen. Łatwo bowiem zauważyć, że zakres zmian ceny zaczyna mieć szczególny wpływ na elastyczność cenową ϵ przy skrajnych (bardzo dużych lub bardzo małych) wartościach cen. Przy cenach bardzo niskich (bliskich zera) usługa zaczyna być traktowana jako darmowa i względne zmiany ceny (nawet o 100%) nie mają większego wpływu na popyt. Z drugiej strony przy cenach bardzo dużych, bliskich granicy możliwości finansowych abonenta, zmiany cen (zwłaszcza podwyżki) wpływałyby bardzo mocno, aż do zaniknięcia popytu. Widać zatem, iż założenie stałej wartości elastyczności ϵ w całym spektrum cen jest założeniem silnie upraszczającym.

W pracy [1] próbuje obejść ten problem wprowadzając tzw. *funkcję modyfikującą popyt*[9] tak, by dla dużych cen popyt zbiegał silnie do zera. Rozwiązanie to jednak przypomina łatanie dziury, którą wcześniej świadomie się uczyniło, bowiem takie rozwiązanie, tworzące bądź co bądź funkcję o nowej postaci, modyfikuje również samą elastyczność, z tą tylko uwagą, że nie jest już ona dana w sposób jawny.

Lepszym rozwiązaniem jest przyjęcie, iż elastyczność jest funkcją ceny, założenie konkretnej postaci tej funkcji, a następnie rozwiązanie równania (F.2) w celu wyznaczenia funkcji popytu.

[8] Całkując i delogarytmując wynik całkowania.

[9] W pracy [1] została ona nazwana *funkcją obcinającą popyt*.

Zastanówmy się nad kształtem krzywej elastyczności cenowej popytu[10]. Zacznijmy od określenia kierunku, czyli odpowiedzmy sobie na pytanie, czy będzie to krzywa rosnąca czy malejąca?

Dla ceny bliskiej zera należy się spodziewać, iż nawet względnie duże zmiany ceny nie spowodują widocznych zmian zapotrzebowania na usługę. Można by nawet zaryzykować tezę, że dla skrajnie małych cen nawet względnie duża zmiana ceny praktycznie nie spowoduje żadnej zmiany wielkości popytu. Mamy więc tu przypadek silnie nieelastycznego popytu ($\epsilon \ll 1$). Z kolei dla dużych cen intuicyjnie wyczuć można, że elastyczność ta będzie większa (w skrajnym przypadku elastyczność ta równa będzie nieskończoności, kiedy to kolejna podwyżka ceny sprawi, że nikt już nie będzie chciał korzystać z usług). Z powyższej analizy wynika oczywisty wniosek, iż będzie to krzywa rosnąca.

Pozostaje pytanie o szybkość narastania tej krzywej (jej kształt). Nie jest to pytanie proste. W szczególności bowiem rzeczywiste zachowanie się abonentów w całym możliwym spektrum zmiany cen może nie dać się opisać za pomocą jednej zależności. Nie jest to jednakże konieczne. Znajomość elastyczności popytu ważna jest jedynie w zakresie realnie możliwych i rozpatrywanych zmian cen[11]. Te z kolei nie są względnie aż tak duże. W związku z powyższym stwierdzić można, iż w tak ograniczonym zakresie zmiany cen istnieje krzywa, która w sposób zadowalający opisze rzeczywistą sytuację.

Poniżej ilustrujemy jedną z przypuszczalnie możliwych funkcji elastyczności cenowej popytu[12].

$$\epsilon = \frac{a \cdot P}{e^{b(P_{max} -- P)} - -1} \tag{F.4}$$

Przy czym:

P_{max}	–	cena, przy której popyt D spada do zera,
a, b	–	parametry.

Rozwiązując równanie (F.2) z elastycznością cenową popytu wyrażoną równaniem (F.4) otrzymujemy następującą postać funkcji popytu w zależności od ceny za usługę:

$$D = \overline{D} \cdot e^{b(P -- \overline{P})} \cdot \left(\frac{e^{b(P_{max} - P)} - 1}{e^{b(P_{max} - \overline{P})} - 1} \right)^{\frac{a}{b}} \tag{F.5}$$

[10] Z racji braku danych odzwierciedlających rzeczywiste zachowanie się abonentów, do identyfikacji postaci funkcji elastyczności popytu przyjmiemy metodę „zdroworozsądkową”.

[11] Cena za usługę ograniczona jest tak zarówno „od dołu” (brak opłat za świadczone usługi – cena zerowa) jak i „od góry”. Ten drugi przypadek wynika choćby z tego faktu, że rynek nie jest w pełni „wolny”, ale zawsze poddawany jakiejś zewnętrznej kontroli, ot choćby (w przypadku Polski) przez Urząd Ochrony Konkurencji i Konsumentów, czy też przez Urząd Regulacji Telekomunikacji i Poczty.

[12] W wyborze postaci funkcji elastyczności cenowej popytu kierowano się między innymi koniecznością analitycznego rozwiązania równania (F.2), co z racji na konieczność całkowania nie jest możliwe dla dowolnie wybranej funkcji.

Popyt $\overline{D}$ i cena $\overline{P}$ mogą tu być traktowane jako wartości średnie po wszystkich okresach obserwacji danych z przeszłości.

Równanie (F.5) będziemy traktowali jako najbardziej ogólną postać zależności popytu od ceny. W dalszej części tekstu zaadoptujemy ją do potrzeb wyrażenia zmian popytu w sensie liczby nawiązanych połączeń C, średniej liczby impulsów przypadających na jedno połączenie T oraz liczby abonentów U.

Pozostaje jeszcze otwartym pytanie, czy cena usługi wpływa na rozpływ związanego z nią ruchu w sieci, czy winniśmy uwzględnić wpływ zmiany ceny w modelu rozpływu ruchu. Aby odpowiedzieć na to pytanie prześledzimy następujące rozumowanie. Można przyjąć, iż podział abonentów na profile jest skorelowany z zamożnością abonentów. Abonenci bardziej zamożni mogą sobie pozwolić na korzystanie z danej usługi nawet wówczas, gdy jest ona stosunkowo droga. Abonenci ubożsi zrobią to tylko wówczas, gdy usługa będzie wystarczająco tania. Można przyjąć, iż w pewnej mierze podział abonentów na bardziej i mniej zamożnych ma również swoje odzwierciedlenie w geograficznej lokalizacji tychże abonentów (dzielnice, miasta, rejony bardziej i mniej zamożne). A zatem z powyższego wynika, że cena usługi ma wpływ na to, w jakich obszarach będzie się z niej korzystać i gdzie będzie ona kierowana. Mimo to jednak w modelu rozpływu ruchu zależności tej nie uwzględnimy wprost. Będzie ona wyrażona pośrednio. W modelu rozpływu ruchu przyjmiemy, iż wielkość ruchu kierowanego z jednego obszaru (ściślej mówiąc strefy numeracyjnej) będzie zależna wprost od liczby abonentów o danym profilu tak zarówno w strefie źródłowej, docelowej, jak i pozostałych strefach. Natomiast cena usług będzie determinowała wyłącznie wielkość ruchu generowanego przez abonentów o danym profilu.

Ceny usług komplementarnych

Przez usługę komplementarną u_k względem usługi u rozumieli będziemy taką, która musi być świadczona zawsze wtedy, gdy jest świadczona usługa u. Na pierwszy rzut oka wydaje się, iż poprzez analogię możemy wprowadzić zatem pojęcie elastyczności mieszanej (tu komplementarnej) popytu, założyć jej postać funkcyjną postaci

$$\epsilon_k = \frac{h \cdot P_k}{e^{c(P_{kmax} - -P_k)} - -1}, \tag{F.6}$$

a następnie rozwiązując równanie różniczkowe analogiczne do równania (F.2) otrzymać funkcję popytu zależną od ceny usługi komplementarnej postaci:

$$D = \overline{D} \cdot e^{c(P_k - -\overline{P_k})} \cdot \left(\frac{e^{c(P_{kmax} - P_k)} - 1}{e^{c(P_{kmax} - \overline{P_k})} - 1} \right)^{\frac{h}{c}}. \tag{F.7}$$

Takie podejście zastosowano w początkowym etapie pracy nad tematem [105, 106]. Jak to jednak wykaże poniższa krytyka, podejście to nie jest poprawne.

Cena usług komplementarnych jest albo zawarta w cenie za jednostkę połączenia (np. cena energii, koszt oprogramowania czy sprzętu, jakie do swojej działalności wykorzystuje operator), albo jest bezpośrednio widziana przez abonentów jako dodatkowe elementy kosztów. A zatem, w przypadku pierwszym, wyróżnianie dodatkowej zależności odzwierciedlającej wpływ usług komplementarnych, jak to sugeruje zależność (F.7), pozbawione jest racji bytu. W przypadku drugim, gdy cena usług komplementarnych widziana jest przez abonenta jako dodatkowe elementy kosztów, ceny tych usług nie wpływają na wielkość generowanego przez abonentów ruchu, czyli popyt D. Opłaty typu: jednorazowy koszt przyłączenia do sieci, miesięczny abonament, koszt terminala, koszt aktywacji poszczególnych usług, itp. nie mają istotnego wpływu na wielkość generowanego ruchu. Mają one natomiast decydujący wpływ na decyzję „być czy nie być abonentem danego operatora". Zatem ceny tych usług wpływają nie na popyt D, tylko na liczbę abonentów U[13]. Wpływ ten wyrazimy poprzez wprowadzenie tzw. *zaagregowanej ceny* $\Re$, której wartość zależna będzie od poszczególnych składników kosztów widzianych przez abonenta.

Ceny usług substytucyjnych

W ekonomii pod pojęciem usługi substytucyjnej u_s względem usługi u rozumie się taką usługę, która w jakiejś mierze może zastępować usługę u. Próbując uwzględnić zjawisko substytucji w modelu popytu rozważymy na wstępie (podobnie jak w przypadku usługi komplementarnej) możliwość zdefiniowania współczynnika elastyczności mieszanej (tu substytucyjnej), a następnie po przez rozwiązanie analogicznego do (F.2) równania różniczkowego, wyznaczenia zależności popytu D od ceny P_s za usługę substytucyjną.

Odpowiedzmy zatem na pytanie: jak będzie się zachowywał popyt na usługę u wraz ze zmianą ceny P_s? Dla skrajnie małych cen P_s popyt na usługę u spadał będzie do zera. Nikt[14] bowiem nie będzie chciał płacić za tę usługę, skoro obok inna (substytucyjna) rozdawana jest za darmo. Z kolei dla bardzo dużych cen P_s, abonenci w ogóle przestaną rozważać możliwość korzystania z usługi substytucyjnej u_s, a więc popyt na usługę u przestanie zależeć od ceny P_s. Zatem dla bardzo dużych cen P_s popyt D jest silnie nieelastyczny (elastyczność ϵ_S spada do zera), a dla małych silnie elastyczny[15]. Możemy więc zaproponować następującą postać elastyczności mieszanej:

$$\epsilon_S = m \cdot e^{-n \cdot P_s} \tag{F.8}$$

[13] Mowa tu jest oczywiście o wpływie bezpośrednim, jawnie wyrażonym w postaci analitycznej. Warto zauważyć bowiem, że jeśli cena usług komplementarnych wpływa na liczbę abonentów, to wpływa na zmianę gęstości telefonicznej, która ma wpływ, jak o tym będzie dalej mowa, na wielkość ruchu generowanego (popyt D), zatem cena usług komplementarnych pośrednio wpływa też na popyt D.

[14] Jest to niewątpliwie uproszczenie. Wyjątkiem jest tu zjawisko snobizmu.

[15] Mowa o elastyczności substytucyjnej.

Korzystając z powyższej zależności i rozwiązując równanie analogiczne do (F.2), otrzymujemy następującą postać funkcji popytu:

$$D = \bar{D} \cdot e^{-m \int_{n \cdot P_s}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} t}. \tag{F.9}$$

Nie jest to postać analityczna, co w niektórych przypadkach może być poważnym ograniczeniem. Moglibyśmy zatem podejść do problemu z drugiej strony, zaczynając od propozycji funkcji popytu, a następnie wyznaczenia w oparciu o zależność (F.2) funkcji elastyczności. Opierając się na przeprowadzonej wyżej analizie substytucji moglibyśmy przykładowo zaproponować funkcję popytu od ceny usługi substytucyjnej postaci:

$$D = \bar{D} \cdot s \cdot \mathrm{tgh}\left(\frac{P_s}{\bar{P}_s} \cdot \alpha\right) \tag{F.10}$$

Różniczkując równanie (F.10) względem P_s, a następnie przekształcając do postaci analogicznej względem (F.2) otrzymalibyśmy postać elastyczności mieszanej popytu wyrażoną równaniem:

$$\epsilon_s = \frac{\alpha \cdot P_s}{\mathrm{tgh}\left(\frac{P_s}{\bar{P}_s} \cdot \alpha\right) \cdot \cosh^2\left(\frac{P_s}{\bar{P}_s} \cdot \alpha\right) \cdot \bar{P}_s} \tag{F.11}$$

Zależność substytucyjna wyrażona równaniem (F.10) zaproponowana została w początkowym etapie pracy nad tematem [105, 106]. W późniejszych pracach przyjęto nieco inne podejście [104, 109, 111].

Wprowadźmy następujące definicje:

Definicja F.2.1 *Substytucją wewnętrzną nazywali będziemy substytucję pomiędzy usługami świadczonymi przez tego samego operatora.*

Definicja F.2.2 *Substytucją zewnętrzną nazywali bedziemy substytucję pomiędzy usługami świadczonymi przez różnych operatorów.*

Substytucja wewnętrzna jest czynnikiem wpływającym na wielkość generowanego popytu D (w ramach określonej usługi, w określonej relacji, w określonym przedziale czasowym i dniu tygodnia), natomiast substytucja zewnętrzna wpływa na liczbę abonentów operatora. Ponadto, jeśli przyjmiemy, iż ta sama usługa u, świadczona przez danego operatora A, lecz w różnych okresach czasowych t, czy też innego dnia tygodnia n jest dla abonenta w niejednakowym stopniu użyteczna, to w ramach substytucji wewnętrznej, oprócz substytucji między poszczególnymi usługami wyróżnić jeszcze możemy substytucję między okresami czasowymi i dniami tygodnia, które jednoznacznie identyfikowało będzie usługę w sensie jej istoty, pory dnia i dnia tygodnia, kiedy to została ona wyświadczona.

W dalszej części tekstu wprowadzimy cztery funkcje substytucji, których zadaniem będzie opisanie rozważanych zależności. Będą to odpowiednio:

Γ – funkcja substytucji między usługami
H – funkcja substytucji między okresami czasowymi
Θ – funkcja substytucji między dniami tygodnia
Ω – funkcja substytucji między operatorami

Wielkość dochodu abonentów

Dla opisania zależności pomiędzy popytem na usługi D, a wielkością dochodu abonentów R (*Revenue*) ekonomia wprowadza pojęcie *elastyczności dochodowej popytu* ϵ_R, które zdefiniowano poprzez matematyczną zależność postaci:

$$\frac{\frac{dD}{D}}{\frac{dR}{R}} = \epsilon_R \tag{F.12}$$

W celu zamodelowania zależności popytu D od dochodu R możemy wykorzystać dwa zasadnicze podejścia. W pierwszym, po przez analogię do punktów wcześniejszych, zakładamy postać funkcji elastyczności ϵ_R, a następnie w oparciu o równanie (F.12) wyznaczamy funkcję popytu, lub też odwrotnie, zakładając postać funkcji popytu, wyznaczamy funkcję elastyczności. W drugim, który wydaje się być znacznie prostszym, a niekoniecznie uboższym w istotne informacje, uwzględniamy wpływ wielkości dochodu na popyt, traktując cenę $\tilde{P}$ za usługę jako cenę względną, traktowaną jako iloraz ceny rzeczywistej i dochodu[16]. W niniejszej pracy przyjmiemy drugie z prezentowanych podejść.

Użyteczność pojęcia elastyczności

W poprzednich punktach odwoływaliśmy się do pojęcia elastyczności (elastyczności cenowej, komplementarnej, substytucyjnej, dochodowej). Było to użyteczne (choć niekonieczne) ze względu na tworzenie funkcji popytu. Okazuje się jednakże, iż pojęcie elastyczności popytu już samo w sobie kryje szereg ciekawych informacji, przydatnych tak zarówno dla poszczegolnych operatorów, jak i regulatora rynku [102].

Implikacje dla dostawców usług i operatorów sieci

Znajomość elastyczności cenowej ϵ pozwala wyznaczyć optymalny kierunek zmian ceny usługi tak, aby zmaksymalizować czerpany z jej świadczenia dochód. Dochód równy jest iloczynowi popytu i ceny. Jeśli zmiana ceny o 1% powoduje zmianę popytu o mniej niż 1% (popyt nieelastyczny), to wzrost ceny zwiększa dochód operatora. Jeśli zmiana ceny o 1% powoduje zmianę

[16] Analogicznie postępujemy dla ceny za usługi komplementarne P_k i substytucyjne P_s.

popytu o więcej niż 1% (popyt elastyczny), to obniżenie ceny zwiększa dochód (poprzez bardziej zwiększony popyt). Dodatkowo znajomość ϵ umożliwia oszacowanie wielkości przewidywanego zysku, jeśli tylko operatorzy znają modele kosztów własnych sieci.

Pierwsze z powyższych twierdzeń, wydaje się nie wnosić nic szczególnego dla rozumienia praw obowiązujących na rynku usług telekomunikacyjnych. Zdaje się być słusznym pogląd, iż popyt na usługi telekomunikacyjne jest nieelastyczny, a co za tym idzie, iż wzrostowi cen towarzyszyć będzie wzrost wydatków ponoszonych przez konsumentów. A więc, że w interesie operatora jest podnosić te ceny. Jednakże staje się to mniej oczywiste w kontekście rosnącej gamy świadczonych usług, jak również ich dostawców. W tak pojętej sytuacji (wielu operatorów świadczących wiele konkurencyjnych usług), nieelastyczność popytu na usługę u świadczoną przez operatora A, staje się dyskusyjna.

Ponadto, znajomość elastyczności cenowej ϵ oraz elastyczności mieszanych (komplementarnej ϵ_K, substytucyjnej ϵ_S) pozwala właściwie dobrać wysokość, jak również proporcje pomiędzy cenami za poszczególne usługi tak, aby dochód ze świadczenia wszystkich rozpatrywanych usług był maksymalny. Znajomość poszczególnych elastyczności mieszanych na świadczone przez siebie usługi pozwala ponadto wyłonić usługi wzajemnie komplementarne i substytucyjne. Jest to ważne z punktu widzenia planowania strategii marketingowej. Przykładowo reklama usługi połączeń do sieci internet za pomocą telefonu komórkowego jest jednocześnie reklamą samej telefonii komórkowej.

Jeśli założyć, że daną usługę u świadczy operator konkurencyjny, to znajomość elastyczności substytucyjnej, związanej z tą usługą pozwala przewidzieć wpływ jego polityki taryfikacyjnej na własne wyniki finansowe.

Ponadto, znajomość elastyczności substytucyjnej ϵ_s zewnętrznej (między operatorami) pozwala oszacować wpływ polityki operatorów konkurencyjnych na liczbę abonentów w swojej sieci.

Z kolei znajomość elastyczności dochodowej ϵ_R umożliwia oszacowanie zmiany dochodów operatora wraz ze zmianą poziomu gospodarki kraju (w ogólności obszaru objętego siecią operatora).

Implikacje dla regulatora rynku

Szczególnie interesująca z punktu widzenia regulatora rynku wydaje się być znajomość elastyczności cenowej popytu ϵ. Zgodnie z zaleceniami Unii Europejskiej jednym z celów działalności organu regulującego jest nadzór i wspieranie realizacji prospołecznych celów polityki Unii [56, 58, 66, 80, 82, 83, 138, 140, 188]. Do szczególnych zadań należy nakładanie na operatorów o znaczącej pozycji rynkowej obowiązku świadczenia *usługi powszechnej*, przy czym mówi się tu raczej o pewnym pakiecie usług podstawowych, do których powszechny dostęp jest warunkiem koniecznym „w drodze do społeczeństwa informacyjnego" [114, 179, 193]. Wielkość elastyczności cenowej popytu mogłaby być zatem jednym z czynników klasyfikujących daną usługę jako powszechną. Im popyt na daną usługę jest mniej elastyczny, tym jest ona niejako bardziej potrzebna i bliższa temu, by uznać ją za powszechną[17].

Liczba abonentów (z uwzględnieniem ich profilu, gęstości telefonicznej)

Model liczby abonentów stanowi podstawowy element budowanego modelu popytu. Powstaje pytanie, czy liczba abonentów ma również wpływ na funkcję popytu. Odpowiedź jest pozytywna. Poniższa analiza pozwoli nam określić charakter tych zależności.

Zauważmy, iż wielkość ruchu generowanego przez danego abonenta, którego utożsamić możemy z pojęciem jednej linii abonenckiej[18], zależy od liczby mieszkańców przypadających na tę linię. Pojęcie liczby mieszkańców danego obszaru i liczby abonentów w tym obszarze, nie są pojęciami tożsamymi, a ich wzajemną relację wyrazić można poprzez wprowadzenie pojęcia *gęstości telefonicznej*[19], która wyraża się stosunkiem liczby abonentów do liczby mieszkańców. Łatwo zauważyć, że im większa jest w danej strefie gęstość telefoniczna (im mniej mieszkańców przypada na jedną linię), tym mniejszy ruch generowany jest przez jednego abonenta (na jednej linii). Wpływ zmiany gęstości telefonicznej na poszczególne składniki popytu D (liczbę nawiązanych połączeń C oraz średnią liczbę impulsów przypadających na jedno połączenie T) może być różny. Wydaje się, iż większy wpływ zaobserwujemy w przypadku liczby nawiązanych połączeń C, aniżeli w przypadku średniej liczby impulsów przypadających na pojedyncze połączenie T. Wpływ gęstości telefonicznej na funkcję popytu uwzględnimy w dalszej części tekstu poprzez wprowadzenie tzw. *funkcji obciążenia linii* – G.

Rozważmy następnie wpływ zmiany liczby abonentów na funkcję popytu (popyt D), przy założeniu stałej gęstości telefonicznej, czyli sytuację, gdy liczba abonentów zmienia się proporcjonalnie do liczby mieszkańców w danym obszarze. Nasza uwaga skupia się zatem na zmianie wielkości popytu, wynikającej wprost ze zmiany liczby abonentów, przy niezmiennej liczbie mieszkańców przypadających na abonenta. Rozważmy przykład trywialny. Jeśli w sieci jest tylko dwóch abonentów i korzystają oni z usługi połączenia telefonicznego, to dołączenie się trzeciego najprawdopodobniej spowoduje wzrost ruchu generowanego przez nich (do większej liczby osób można już się dodzwonić). Sytuacja będzie podobna, gdy dołączy się czwarty, piąty... Ale gdy

[17] Kwestia ta funkcjonuje w świadomości ustawodawców [138].

[18] Tak jest oczywiście w przypadku połączeń stacjonarnych, ogólniej mówić tu możemy o numerze identyfikującym abonenta.

[19] Pojęcie to powszechnie jest używane w środowisku telekomunikacyjnym i kojarzy się wprost z usługą połączenia telefonicznego. Tu uogólnimy to pojęcie na pozostałe usługi.

już liczba ta przekroczy pewien próg, dalszy wzrost nie będzie miał raczej większego wpływu na wielkość ruchu generowanego przez poszczególnych abonentów. Sytuację tę można opisać następującą zależnością:

$$D = \overline{D} \cdot g \cdot \mathrm{tgh}\left(\frac{U}{\beta}\right), \tag{F.13}$$

gdzie U oznacza liczbę abonentów, korzystających z usług. Wydaje się jednak, iż przy aktualnej, względnie dużej liczbie abonentów dalszy wzrost tej liczby w praktyce nie będzie miał znaczącego wpływu na wielkość ruchu generowanego przez poszczególnych abonentów. W tym sensie można mówić o nasyceniu się rynku[20]. Dlatego też tego typu zależności w naszym modelu nie uwzględnimy.

Zmiana liczby abonentów w poszczególnych obszarach objętych działalnością operatora (jak również operatorów sąsiadujących) wpływa ponadto w sposób istotny na rozpływ ruchu w sieci. Im więcej jest abonentów na danym obszarze, tym więcej ruchu będzie tam zarówno generowanego, jak i zakańczanego. Ponadto oprócz liczby abonentów istotny będzie tu ich profil.

Odległość między strefami źródłową i docelową.

Odległość między strefami źródłową (tą, w której ruch jest generowany) i docelową (tą, do której ruch jest kierowany) ma istotny wpływ na wielkość ruchu kierowanego w tej relacji. W ogólności zasada „im bliżej, tym więcej" („im dalej, tym mniej") wydaje się być słuszna. Ponadto, dla poprawnego uwzględnienia wpływu odległości na wielkość generowanego ruchu w danej relacji koniecznym jest spojrzenie bardziej globalne aniżeli tylko na dwie strefy, bowiem to, czy na większą odległość faktycznie kierowane będzie mniej ruchu, uzależnione jest silnie od tego, „czy w odległości bliższej znajduje się to, czego szukamy daleko". Trafniejszym ujęciem wydaje się być w związku z tym określenie odległości między strefą źródłową a *strefami* docelowymi, czyli rozpatrywanie nie pojedynczej odległości, a ich wektora.

W przypadku wielkości generowanego ruchu zasada „im bliżej, tym więcej" nie jest oczywista. Nasuwa się wręcz sugestia, że w szczególnych przypadkach obowiązywać winna zasada przeciwna: „im dalej, tym więcej". Dotyczy to w szczególności osób przebywających na terenach położonych w dużej odległości od zbiorowisk ludzkich. „Tam gdzie nie można szybko dojść lub dojechać chce się częściej dzwonić" – to inne brzmienie owej zasady[21].

Zasada „im dalej, tym więcej" teoretycznie obowiązywać również winna w kwestii liczby abonentów. „Skoro trudno dojść lub dojechać, to dobrze mieć możliwość dodzwonienia się". W praktyce jednak zasada ta napotyka na duże problemy w jej realizacji. Za przykład niech

[20] Raz jeszcze podkreślmy, że chodzi nam o wpływ wzrostu liczby nowych abonentów na wielkość ruchu generowanego przez abonentów starych, a nie o wzrost ruchu w sieci w ogóle.

[21] Nie uwzględniamy w tym miejscu ceny połączeń.

posłuży problem telefonizacji wsi. Brak ekonomicznego interesu (duże koszta budowy sieci przy niskich dochodach czerpanych z tych obszarów) jest czynnikiem, który decyduje o tym, że operatorzy pozostawiają tę zasadę jedynie w teorii. Faktycznie więc odnajdujemy tu konsekwentnie realizowaną zasadę „im bliżej, tym więcej".

Zasada „im bliżej, tym więcej" obowiązuje również w kwestii rozpływu ruchu w sieci. Z pewnym uproszczeniem możemy powiedzieć, iż bliżej mamy więcej znajomych, więcej interesujących nas urzędów, biur, sklepów, centrów usługowych itp., i do nich w pierwszej kolejności zwykliśmy się kierować.

Odległość między strefami jest czynnikiem stałym w modelu. Operatorzy na ten czynnik nie mają wpływu, tak jak go mają w przypadku np. ceny. Określa on zatem nie tyle *zmienność* popytu, co raczej jego *poziom* lub *strukturę*.

W przypadku funkcji popytu i modelu liczby abonentów odległość zostanie uwzględniona pośrednio, przez dobór profilu abonentów[22]. Dla każdego profilu abonentów model posiadał będzie inne wartości odpowiednich parametrów.

Sposób implementacji wpływu odległości na rozpływ ruchu w sieci uzależniony jest sposobem zdefiniowania pojęcia usługi. Rozpatrzmy dla przykładu usługę połączenia telefonicznego. Jeśli usługę definiowali będziemy z uwzględnieniem odległości (połączenie lokalne, połączenie międzystrefowe, połączenie międzynarodowe), to tym samym rozwiązujemy problem rozpływu ruchu[23]. Lokalne połączenia telefoniczne kierowane są do tej strefy, w której zostały wygenerowane. Połączenia międzystrefowe z pojedynczym tranzytem do stref sąsiadujących, a z podwójnym do stref położonych dalej itd. Jeśli natomiast definicja usługi będzie bardziej ogólna, bez rozdzielania z punktu widzenia odległości, to kwestią rozpływu ruchu zająć się trzeba niezależnie. Jeden ze sposobów rozwiązania tego zagadnienia przedstawiony został w pracach [105, 106]. Model rozpływu ruchu zawierał tam współczynnik $\aleph^{d}_{AiBj}$, który odpowiadał udziałowi ruchu kierowanego w relacji i-ta strefa operatora A, j-ta strefa operatora B w całym ruchu generowanym w strefie i-tej operatora A. Współczynnik ten zdefiniowany został zależnością:

$$\aleph^{d}_{AiBj} = \frac{d_{AiBj}}{\sum_{O \in Operatorzy} \sum_{s \in Strefy} d_{AiOs}} \tag{F.14}$$

Współczynnik d_{AiBj} to parametr o wartości zależnej od odległości między i-tą strefą operatora A, a j-tą strefą operatora B[24]. d_{AiBj} przyjmuje wartość tym mniejszą, im dalej względem siebie położone są strefy i-ta oraz j-ta . W pracach [105, 106] przyjęto cztery wartości tych współczynników odpowiadające czterem szczególnym położeniom rozpatrywanych stref.

[22] Przykładowo abonentów (czy to aktualnych, czy potencjalnych) położonych w dużej odległości od ważnych zbiorowisk ludzkich zaklasyfikować można do grupy abonentów wiejskich.

[23] Rozwiązujemy problem rozpływu ruchu wyłącznie w sensie odległości między strefami.

[24] W szczególności może to być jedna i ta sama strefa, jak i ten sam operator.

d_1 – gdy strefa Ai pokrywa się ze strefą Bj,

d_2 – gdy strefa Ai sąsiaduje ze strefą Bj,

d_3 – gdy strefa Ai oddzielona jest co najmniej jedną strefą od strefy Bj,

d_4 – dla ruchu międzynarodowego.

Przy czym spełniona była zasada

$$d_1 > d_2 > d_3 > d_4.$$

Wybór czterech wartości współczynników d uzasadniony był tym, że odzwierciedlało to odpowiednie poziomy połączenia międzysieciowego:

d_1 – dla połączenia na poziomie lokalnym,

d_2 – dla połączenia na poziomie tranzytowym z pojedynczym tranzytem,

d_3 – dla połączenia na poziomie tranzytowym z podwójnym tranzytem,

d_4 – dla ruchu międzynarodowego.

W niniejszej pracy wpływ odległości na rozpływ ruchu w sieci zostanie uwzględniony z wykorzystaniem pierwszego z dwóch zilustrowanych sposobów, czyli poprzez traktowanie połączeń lokalnych, międzystrefowych z pojedynczym tranzytem, międzystrefowych z podwójnym tranzytem oraz międzynarowowych jako osobnych usług. Tym samym odległości będą uwzględnione bezpośrednio w funkcji popytu, a nie w modelu rozpływu ruchu.

Czas (w sensie pory dnia) świadczenia usługi

Aktywność ludzka charakteryzuje się różną intensywnością w zależności od pory, w której przyszło jej się realizować. Rzecz nie inaczej ma się z aktywnością telekomunikacyjną. Zapotrzebowanie na usługi tego typu inne jest w godzinach szczytu i inne poza szczytem, inne w ciągu dnia i inne w nocy. Faktu tego w procesie modelowanie popytu pominąć nie wolno.

Wielkość ruchu generowanego przez abonentów uzależniona jest w sposób jasny od pory dnia czy nocy. Nieco mniej oczywisty jest związek okresu czasowego z liczbą abonentów. Związek ten staje się widoczny, jeśli powołamy się na uczynione we wcześniejszych punktach rozróżnienie na *abonentów operatora* (Def. F.1.4) i *abonentów usługi* (Def. F.1.5). Dotyczy to w szczególności abonentów usługi (dla przykładu, w różnych okresach czasowych z różną intensywnością korzystamy z usług międzymiastowych). I wreszcie czas świadczenia usług ma wpływ na rozpływ ruchu w sieci. Dla przykładu, w godzinach szczytu przeważać będzie ruch o charakterze biznesowo-urzędowym, a poza szczytem o charakterze prywatnym. To zróżnicowanie charakteru ruchu wpływa na zróżnicowanie miejsc, gdzie ten ruch jest generowany i dokąd kierowany. Jednakże jeśli przyjmiemy, iż interesującym dla nas poziomem szczegółowości jest poziom strefy numeracyjnej, to wydaje się, że to zróżnicowanie rozpływu ruchu, uwarunkowane czasem świadczenia usługi wolno nam pominąć.

W punkcie F.2.2 wspomnieliśmy, iż zjawisko substytucji zachodzi również pomiędzy okresami czasowymi. Cena usługi świadczonej przykładowo w godzinie szczytu, ma istotny wpływ na wielkość zapotrzebowania na tę usługę poza szczytem. Fakt ten zostanie uwzględniony w modelu popytu poprzez wprowadzenie do funkcji popytu tzw. *funkcji substytucji między okresami czasowymi* – H.

Dzień tygodnia

Wpływ dnia tygodnia, w którym świadczone są usługi telekomunikacyjne na popyt na te usługi jest w swej istocie bardzo podobny do wpływu, jaki posiada wyżej dyskutowany czas. Pominiemy tu zatem jego szczegółową analizę. Nadmienimy jedynie, że słusznym wydaje się rozróżnienie dni na dwa rodzaje – dni pracujące i dni wolne od pracy. Dla wyrażenia substytucji pomiędzy nimi wprowadzona zostanie tzw. *funkcja substytucji między dniami tygodnia* – Θ.

Wizerunek (prestiż) operatora

Psychologiczne uwarunkowania człowieka przyczyniają się do tego, iż nie jest mu obojętnym, kto świadczy mu usługę. „Ten sam kubek wody, podany przez szefa największej w świecie korporacji produkującej kubki i przez jednego z jej etatowych pracowników dla wielu z nas nie są tymi samymi kubkami wody.” Moglibyśmy tu wymienić niezliczoną ilość czynników, które decydują o tym, którego z operatorów potencjalny abonent chciałby wybrać, poczynając od silnie racjonalnych, takich jak jakość obsługi, dostępność i jakość usług, wiarygodność, terminowość wykonywania usług, itp. poprzez czysto snobistyczne – „On/Ona[25] też jest ich abonentem!”. W tym miejscu mniej nas interesuje to, co jest powodem lepszego wizerunku danego operatora[26]. Skupimy się raczej na próbie ilościowego wyrażenia owej przewagi wizerunku jednego operatora nad drugim. W tym celu wprowadzimy w dalszej części *funkcję substytucji między operatorami* – Ω.

Gusta użytkowników

Tajemnica wyboru takiej, a nie innej usługi, tego, a nie innego operatora ostatecznie zmierza do spotkania z tą szczególną tajemnicą jaką jest człowiek. Redukując wagę tej tajemnicy li tylko do kwestii jego wyborów, napotykamy niebanalną trudność – błogosławioną! – opisania w sposób deterministyczny jego zachowania. Utylitarystyczne nastawienie tej pracy, próbujące ująć w sztywne ramy osobę ludzką, poszukujące jednoznacznego oblicza tej jego części, którą zwykliśmy nazywać konsumencką, staje tu przed wyzwaniem, któremu sprostać nie jest w stanie.

[25] Przy czym z Onym lub Oną nigdy nie będziemy się komunikować.

[26] Niewątpliwie istotne rozważania tego typu pozostawiamy specjalistom od marketingu i public relation.

Kwestia ludzkich wyborów pozostanie zatem w dalszym ciągu do końca niezgłębioną tajemnicą. Wszelkie rozbieżności pomiędzy wynikami otrzymanymi w oparciu o jakikolwiek model, a wynikami rzeczywistymi, odnajdą zawsze swe uzasadnianie w wolności ludzkich wyborów.

F.3 Model Popytu

Rozważania poczynione we wcześniejszych punktach doprawadziły nas do miejsca, w którym przedstawimy propozycję modelu popytu na usługi telekomunikacyjne. Zważywszy na fakt, iż rozpatrywane zależności są dość skomplikowane, jak również na trwający ciągle proces zmiany formy rynku – od monopolu do konkurencji[27], prezentowany model konstruować będziemy w trzech osobnych punktach, poczynając od przypadku najprostszego, który nazwiemy *przypadkiem ekstremalnym*, poprzez *przypadek monopolu*, by wreszcie dojść do *przypadku konkurencji*. Dla każdego z przypadków prezentowane będą odpowiednie modele składowe – *model funkcji popytu*, *model liczby abonentów* i *model rozpływu ruchu*.

F.3.1 Przypadek ekstremalny

Rozpatrzymy następującą sytuację. Mamy do czynienia tylko z jednym operatorem A, świadczącym tylko jedną usługę u, jednego dnia n i w jednym okresie czasowym t, dla abonentów o jedynym profilu p. Przyjmijmy ponadto, że liczba abonentów strefy równa jest liczbie mieszkańców (gęstość telefoniczna γ równa jedności).

Założenia:

- jeden operator – A
- jedna usługa – u
- jeden okres czasowy – t
- jeden dzień – n
- jeden rodzaj (profil) abonentów – p
- jednostkowa gęstość telefoniczna – $\gamma = 1$

Model funkcji popytu

Uwzględniając powyższe założenia oraz rozróżnienie poczynione w punkcie F.2.2, gdzie wyróżniliśmy popyt w sensie liczby nawiązanych połączeń C oraz w sensie średniej liczby impulsów

[27] W sensie realnym, nie zaś struktur prawnych.

przypadających na jedno połączenie T, wielkość popytu generowanego przez abonenta w strefie i-tej wyrazić możemy zależnością (F.15).

$$D_{Aiputn} = \hat{D}_{Aiputn} = \hat{C}_{Aiputn} \cdot \hat{T}_{Aiputn} \tag{F.15}$$

gdzie:

$\hat{C}_{Aiputn}$	–	liczba nawiązanych połączeń w przypadku ekstremalnym
$\hat{T}_{Aiputn}$	–	średni czas trwania połączenia w przypadku ekstremalnym
$\hat{D}_{Aiputn}$	–	całkowity ruch generowany przez jednego abonenta w przypadku ekstremalnym

Powołując się na wprowadzone w punkcie F.2.2 pojęcie *elastyczności cenowej popytu* ϵ, zdefiniowane zależnością (F.2), które tu zaadoptujemy tak zarówno do popytu w sensie C, jak i w sensie T, oraz zakładając, że elastyczność ta jest monotonicznie rozsnącą funkcją ceny o postaci (F.4), liczbę nawiązanych połączeń w przypadku ekstremalnym $\hat{C}_{Aiputn}$ oraz średni czas trwania połączeń w przypadku ekstremalnym $\hat{T}_{Aiputn}$ wyrazimy poprzez następujące zależności:

$$\hat{C}_{Aiputn} = \overline{C}_{Aiputn} \cdot e^{b(P_{Aiputn} - -\overline{P}_{Aiputn})} \cdot \left(\frac{e^{b(P_{Aiputn\,\max} - P_{Aiputn})} - 1}{e^{b(P_{Aiputn\,\max} - \overline{P}_{Aiputn})} - 1} \right)^{\frac{a}{b}}, \tag{F.16}$$

$$\hat{T}_{Aiputn} = \overline{T}_{Aiputn} \cdot e^{n(P_{Aiputn} - -\overline{P}_{Aiputn})} \cdot \left(\frac{e^{n(P_{Aiputn\,\max} - P_{Aiputn})} - 1}{e^{n(P_{Aiputn\,\max} - \overline{P}_{Aiputn})} - 1} \right)^{\frac{m}{n}}. \tag{F.17}$$

Warto zauważyć, iż maksymalne ceny $P_{Aiputn\,\max}$ w obu zależnościach (F.16) i (F.17) przyjmują jednakową wartość (maksymalna cena akceptowalna przez abonentów jest taka sama bez względu na to, czy rozpatrujemy liczbę nawiązywanych połączeń, czy średni czas ich trwania; innymi słowy cena, przy której liczba nawiązanych połączeń spada do zera, równa się cenie, przy której średni czas trwania połączenia wynosi zero).

Model liczby abonentów

Przyjmując, iż liczba abonentów U w zależności od ceny usługi P zmieniała się będzie zgodnie z zależnością (F.18)

$$\frac{\frac{dU}{U}}{\frac{dP}{P}} = -\epsilon_U \tag{F.18}$$

oraz, że współczynnik elastyczności ϵ_U zdefiniowany będzie analogicznie do zależności (F.4), wówczas rozwiązując równianie (F.18), otrzymamy model liczby abonentów[28]:

$$U_{Aiputn} = \overline{U}_{Aiputn} \cdot e^{b(P_{Aiputn} - -\overline{P}_{Aiputn})} \cdot \left(\frac{e^{b(P_{Aiputn\,\max} - P_{Aiputn})} - 1}{e^{n(P_{Aiputn\,\max} - \overline{P}_{Aiputn})} - 1} \right)^{\frac{a}{b}} \tag{F.19}$$

W tym przypadku pojęcia *abonent operatora* i *abonent usługi*, są – rzecz jasna – pojęciami tożsamymi.

Sumując po wszystkich strefach otrzymamy całkowitą liczbę abonentów U_A operatora A:

$$U_A = \sum_i U_{Aiputn} \tag{F.20}$$

Model Rozpływu Ruchu

Przyjęte w przypadku ekstremalnym założenie, że mamy do czynienia tylko z jednym operatorem rozumieć należy w tym sensie, iż na danym obszarze brak jest konkurencji. Przykładem może tu być sytuacja, gdy w danej strefie usługi telekomunikacyjne oferować może tylko jeden operator lokalny. Operator ten może obejmować swą działalnością kilka stref, co czyni go automatycznie operatorem międzystrefowym. W innej strefie jednakże może już funkcjonować operator inny. Kluczowym jest tu ów wcześniej wspomniany brak konkurencji. W tej sytuacji ruch generowany przez abonenta kierowany może być do różnych stref, a w przypadku, gdy te strefy podlegają różnym operatorom, do różnych operatorów.

Model rozpływu ruchu reprezentowany będzie przez współczynnik $\aleph_{AiBj}$ informujący, jaka część ruchu generowanego w i-tej strefie operatora A kierowana będzie do j-tej strefy operatora B. W modelu tym, jak to już wcześniej sugerowano, uwzględnimy liczbę abonentów w strefach oraz ich profil. Przyjmiemy, iż wielkość ruchu kierowana w danej relacji będzie wprost proporcjonalna do ważonej profilami liczby abonentów w strefie docelowej. Zależność tę ilustruje poniższe równanie (F.21).

$$\aleph_{AiBj} = \frac{\sum_{p \in Profile} w_p \cdot U_p^{Bj}}{\sum_{o \in Operatorzy} \sum_{s \in Strefy} \sum_{p \in Profile} w_p \cdot U_p^{os}} \tag{F.21}$$

Nawiązując do dyskutowanych w punkcie F.2.2 sposobów uwzględnienia wpływu odległości między strefami na wielkość i – co bardziej w tym miejscu istotne – rozpływ ruchu podkreślamy, iż odległość między strefami w prezentowanym tu modelu uwzględniona została poprzez rozróżnienie usług z punktu widzenia odległości ich świadczenia (połączenia lokalne, międzystrefowe z

[28] W zależności (F.19) konsekwentnie stosujemy indeksowanie U_{Aiputn}. Nie jest to konieczne, gdyż wiemy, że chodzi nam o jedną usługę, jeden okres czasowy, itd. Czynimy to jednakże w tym celu, by nie zamazywać ciągłości rozważań z punktami następnymi (przypadek monopolu i konkurencji), oraz by zachować przejrzystość analogicznych sformułowań.

pojedynczym i podwójnym tranzytem, międzynarodowe). Stąd też dla ruchu lokalnego, kiedy to indeksy i, j oraz A i B są tożsame, współczynnik $\aleph_{AiBj}$[29] równy jest jedności. Dla ruchu międzystrefowego z pojedynczym tranzytem sumowanie w mianowniku zależności (F.21) odbywać się będzie tylko po operatorach i strefach bezpośrednio sąsiadujących ze strefą i operatora A. Natomiast dla ruchu międzystrefowego z podwójnym tranzytem sumowanie będzie po operatorach i strefach w ramach kraju, nie sąsiadujących bezpośrednio ze strefą i operatora A.

Korzystając z wprowadzonych zależności wielkość ruchu generowanego przez abonenta o profilu p w relacji $Ai - Bj$ na usługę u świadczoną w chwili czasowej t dnia tygodnia n wyrazimy zależnością:

$$D^{AiBj}_{Aputn} = D_{Aiputn} \cdot \aleph_{AiBj} \tag{F.22}$$

Szczególnym przypadkiem będzie sytuacja ruchu międzynarodowego. Tu zależność (F.21) wydaje się być nieco sztuczna, acz nie pozbawiona sensownych analogii. Nieco bardziej precyzyjnie można by to wyrazić zmieniając indeksowanie na następujące (F.23):

$$\aleph_{AiC} = \frac{\sum_{p \in Profile} w_p \cdot U_p^C}{\sum_{k \in Kraje} \sum_{p \in Profile} w_p \cdot U_p^k} \tag{F.23}$$

Tu sumowanie po krajach dotyczyć winno tych krajów, z którymi operator A ma podpisaną umowę. Natomiast U_p^C, rozumiane dotychczas jako liczba abonentów w strefie docelowej, odzwierciedlać winno zsumowaną liczbę abonentów w kraju C oraz w krajach, do których połączenie jest realizowane poprzez kraj C. W tym miejscu niemalże samoistnie nasuwa się skojarzenie i chęć uczynienia analogii do ruchu międzystrefowego poprzez wprowadzenie pojęć *ruchu międzynarodowego z pojedynczym i podwójnym tranzytem*. Użyteczność tego typu rozróżnień ukazać się może w praktyce pracy z modelem.

F.3.2 Przypadek Monopolu

Jako następny rozpatrzymy przypadek nieco bardziej ogólny. W dalszym ciągu rozpatrywali będziemy sytuację, gdy dany abonent może korzystać z usług tylko jednego operatora A, lecz operator ten świadczył już będzie wiele usług, w różnych okresach czasowych i we wszystkie dni tygodnia. Ponad to przyjmiemy, że gęstość telefoniczna różna jest od jedności.

Założenia:

- jeden operator
- wiele usług
- wiele okresów czasowych

[29] Precyzyjniej $\aleph_{AiAi}$

- wiele dni
- wiele rodzajów (profili) abonentów
- gęstość telefoniczna różna od jedności

Model funkcji popytu

Przy takich założeniach, całkowity ruch generowany przez jednego abonenta o profilu p będzie różny od zdefiniowanego w rozważanym poprzednio przypadku ekstremalnym (F.15). Teraz wielkość popytu wyrazimy zależnością (F.24).

$$\hat{D}_{Aiputn} \neq D_{Aiputn} = C_{Aiputn} \cdot T_{Aiputn} \tag{F.24}$$

Popyt w sensie liczby nawiązanych połączeń C wyrazimy zależnością:

$$C_{Aiputn} = \hat{C}_{Aiputn} \cdot G^{C}_{ip} \cdot \Gamma^{C}_{Aiputn} \cdot H^{C}_{Aiputn} \cdot \Theta^{C}_{Aiputn} \tag{F.25}$$

Natomiast popyt w sensie średniej liczby impulsów przypadających na połączenie T, wyrazimy równaniem:

$$T_{Aiputn} = \hat{T}_{Aiputn} \cdot G^{T}_{ip} \cdot \Gamma^{T}_{Aiputn} \cdot H^{T}_{Aiputn} \cdot \Theta^{T}_{Aiputn} \tag{F.26}$$

gdzie:

G	–	funkcja obciążenia linii, związana z gęstością telefoniczną γ
Γ	–	funkcja substytucji między usługiami
H	–	funkcja substytucji między okresami czasowymi
Θ	–	funkcja substytucji między dniami tygodnia
$\hat{C}$	–	popyt zdefiniowany zależnością (F.16)
$\hat{T}$	–	popyt zdefiniowany zależnością (F.17)

W dalszej części zostaną przedstawione postaci analityczne wyżej wymienionych funkcji.

Gęstość telefoniczną γ obrazuje zależność (F.27), gdzie Uip oznacza liczbę abonentów o profilu p w strefie i-tej, a M_{ip} liczbę mieszkańców w i-tej strefie takich, którzy potencjalnie mogą stać się abonentami o profilu p.

$$\gamma_{ip} = \frac{U_{ip}}{M_{ip}} \tag{F.27}$$

Opierając się na poczynionych w punkcie F.2.2 spostrzeżeniach wnioskujemy, iż funkcja obciążenia linii G powinna być malejącą funkcją gęstości telefonicznej γ. Przykładowe postaci funkcji G przedstawione są poniżej (F.28) (F.29). Dla uproszczenia zapisu pominięte zostały indeksy ip przy współczynnikach gęstości telefonicznej γ oraz oznaczenie C lub T przy funkcji G.

$$G = \frac{1}{\gamma^{a}} \tag{F.28}$$

$$G = \frac{e^a - -1}{e^{b\gamma} - 1} \tag{F.29}$$

Zanim zdefiniujemy funkcje substytucji Γ, H i Θ, wprowadzimy wcześniej pojęcie *współczynnika substytucji* – s_{ij}.

Definicja F.3.1 *Współczynnikiem substytucji s_{ij} nazywali będziemy współczynnik określający w jakiej mierze wielkość i-ta jest w stanie zastąpić wielkość j-tą.*

W definicji F.3.1 używamy pojęcia *wielkość*, która w szczególnym przypadku oznaczać będzie:

- usługę,
- czas (w sensie pory dnia),
- dzień tygodnia,

a w trakcie rozpatrywania przypadku konkurencji (patrz punkt F.3.3):

- operatora.

Rozróżnienie to wprowadzamy dla odzwierciedlenia rozpatrywanych tu trzech rodzajów substytucji wewnętrznej i substytucji zewnętrznej, zatem w dalszej części będziemy mówili odpowiednio o:

- współczynniku Γ-substytucji,
- współczynniku H-substytucji,
- współczynniku Θ-substytucji.
- współczynniku Ω-substytucji.

Współczynnik substytucji przyjmował będzie wartości z przedziału od 0 do 1. Jeśli $s_{ij} = 1$, to oznacza to, iż wielkość i-ta jest idealnie substytucyjna względem j-tej, jeśli $s_{ij} = 0$, to oznacza to, iż wielkość i-ta nie jest w stanie w jakiejkolwiek mierze zastąpić wielkości j-tą. Oczywiście dla $i = j$, $s_{ij} = 1$.

Wprowadźmy ponadto pewne funkcje zależne od ceny danej usługi i zdefiniowanego powyżej współczynnika substytucji. Funkcje te będziemy nazywali *funkcjami względnej wartości usługi* – f. Funkcje te będą przyjmowały wartość tym większą, im niższa będzie cena za daną usługę oraz im większa będzie, z punktu widzenia abonenta, użyteczność danej usługi. Jako że funkcja ta posłuży nam do zdefiniowania funkcji substytucji Γ, H i Θ, toteż przyjmiemy, że użyteczność usługi, będzie wartością względną (wzgląd na inne usługi) i do jej wyrażenia posłużymy się wcześniej wprowadzonymi współczynnikami substytucji. Podobnie jak wyżej, z racji na fakt, iż funkcje te wprowadzimy dla trzech rodzajów substytucji, toteż będziemy mówić o:

- funkcji Γ-względnej wartości usługi,
- funkcji H-względnej wartości usługi,
- funkcji Θ-względnej wartości usługi.

Przykładowe postaci funkcji względnej wartości usługi ilustrują zależności (F.30), (F.31), (F.32). Dla uproszczenia pominięto indeksowanie.

$$f = \frac{s}{P^a} \tag{F.30}$$

$$f = \frac{s}{e^{aP} - -1} \tag{F.31}$$

$$f = s \cdot \log_a \left(\frac{P}{P_{max}} \right) \tag{F.32}$$

Korzystając z wprowadzonych uprzednio współczynników substytucji oraz funkcji względnej wartości usługi, odpowiednie funkcje substytucji wyrazimy w sposób poniższy:

$$\Gamma_{Aiputn} = \frac{f^{\Gamma}_{ptn}(P_{Aiputn}, s^{\Gamma}_{uu})}{\sum_{g \in Usugi} f^{\Gamma}_{ptn}(P_{Aipgtn}, s^{\Gamma}_{gu})} \tag{F.33}$$

$$H_{Aiputn} = \frac{f^{H}_{pun}(P_{Aiputn}, s^{H}_{tt})}{\sum_{k \in Okresy} f^{H}_{pun}(P_{Aipukn}, s^{H}_{kt})} \tag{F.34}$$

$$\Theta_{Aiputn} = \frac{f^{\Theta}_{put}(P_{Aiputn}, s^{\Theta}_{nn})}{\sum_{d \in Dni} f^{\Theta}_{put}(P_{Aiputd}, s^{\Theta}_{dn})} \tag{F.35}$$

Model liczby abonentów

W sytuacji, gdy do czynienia mielibyśmy z tym typem abonentów, których w punkcie F.1.5 nazwaliśmy *abonentami usługi* (patrz definicja F.1.5), model liczby abonentów w przypadku monopolu będzie identyczny, jak w przypadku ekstremalnym (F.19).

W przypadku *abonentów operatora* (patrz definicja F.1.4) sprawa już się nieco komplikuje. W dalszym ciągu abonenci decydują się, czy być abonentem jedynego operatora A. Jednakże w tym przypadku ich decyzja nie opiera się na cenie jednej usługi, lecz na całej palecie usług świadczonych przez operatora i związanych z nimi cen. Wprowadzimy zatem pojęcie *ceny zaagregowanej*, na podstawie analizy której hipotetyczny abonent podejmuje swoją decyzję odnośnie korzystania z oferty operatora. Załóżmy, iż abonent szacuje swe potencjalne zainteresowanie poszczególnymi usługami, przewiduje w jakiej mierze będzie z nich korzystał i na podstawie ich cen wyznacza wielkość wydatków, jaką musiałby na ten cel przeznaczyć. Oczywistym jest fakt, iż abonenci należący do grup o różnych profilach mają niejednakowe preferencje w tej materii. Stąd też ceny zaagregowane wyznaczać należy dla każdej z grup – każdego z profili – osobno. Prostą metodą wyznaczenia ceny zaagregowanej, którą będziemy oznaczali symbolem $\Re$, jest ważona suma, przy czym współczynniki wagi a_u, odpowiadałyby tu względnej wielkości zapotrzebowania danego abonenta na usługę u. Jednakże wnikliwe spojrzenie na właściwości takiej agregacji wykazują jej, w tym przypadku, niewystarczalność. Rozważmy poniższą sytuację.

Operator świadczy usługę u po cenie P_u i dodatkowo pobiera opłatę abonamentową w wysokości P_a. Zauważmy, że przy stałej sumie cen P_u i P_a sytuacje, gdy jedna z nich jest bliska zeru, są dla abonenta szczególnie atrakcyjne. Przykładowo, dla $P_a = 0$ praktycznie każdy skłonny byłby dołączyć się do sieci i korzystać z usług odbierania połączeń, bez względu na to jak wysoka byłaby cena P_u. W sytuacji odwrotnej, gdy $P_u = 0$, usługa równoznaczna byłaby z dzierżawą linii, co z kolei zachęcałoby do zwiększenia generowanego ruchu, za który już nie trzeba płacić. Tak więc ta sytuacja wydaje się również atrakcyjniejsza dla abonenta, aniżeli zrównoważony poziom cen. Poniższe równanie jest jedną z możliwych postaci agregacji uwzględniającej tego typu preferencje abonentów.

$$\Re_{Aip} = \sum_{u\in Usugi} \sum_{t\in Okresy} \sum_{n\in Dni} a_{utn} \cdot P_{Aiputn} + \varepsilon \cdot \prod_{u\in Usugi} \prod_{t\in Okresy} \prod_{n\in Dni} a_{utn} \cdot P_{Aiputn} \tag{F.36}$$

Część iloczynowa w równaniu (F.36) gwarantuje, że zaagregowana cena $\Re$ będzie największa wówczas, gdy ważone ceny poszczególnych usług będą sobie równe (przy ustalonej ich sumie).

Po wprowadzeniu funkcji zaagregowanej ceny $\Re$, model liczby abonentów wyrazimy w postaci (F.37).

$$U_{Aip} = \hat{U}_{Aip} = \overline{U}_{Aip} \cdot e^{b(\Re_{Aip} - -\overline{\Re}_{Aip})} \cdot \left(\frac{e^{b(\Re_{Aip\max} - \Re_{Aip})} - 1}{e^{n(\Re_{Aip\max} - \overline{\Re}_{Aip})} - 1} \right)^{\frac{a}{b}} \tag{F.37}$$

Model Rozpływu Ruchu

W przypadku monopolu, model rozpływu ruchu różnił się będzie od analogicznego modelu dla przypadku ekstremalnego (F.21) tym, że uwzględniał będzie gęstość telefoniczną w strefie docelowej. Im większa gęstość, czyli im mniej mieszkańców przypadało będzie na jedną linię (na jednego abonenta), tym mniej ruchu będzie kierowane na jedną linię w strefie docelowej. Fakt ten uwzględnić możemy wykorzystując wprowadzoną wcześniej funkcję obciążenia linii G (F.28), (F.29). Tak więc część całkowitego ruchu generowanego w strefie i-tej operatora A, kierowana do j-tej strefy operatora B, którą nazywamy tu modelem rozpływu ruchu $\aleph_{AiBj}$, wyrażać będzie zależność:

$$\aleph_{AiBj} = \frac{\sum_{p\in Profile} G_{Bjp} \cdot w_p \cdot U_p^{Bj}}{\sum_{O\in Operatorzy} \sum_{s\in Strefy} \sum_{p\in Profile} G_{Ojp} \cdot w_p \cdot U_p^{Os}} \tag{F.38}$$

Przy czym funkcja obciążenia linii G_{Bjp} wyrażona będzie poprzez iloczyn funkcji C-obciążenia linii (obciążenia liczbą nawiązanych połączeń) i funkcji T-obciążenia linii (obciążenia czasem trwania połączeń):

$$G_{Bjp} = G^{C}_{Bjp} \cdot G^{T}_{Bjp}. \tag{F.39}$$

Model (F.38), analogicznie jak to było w przypadku ekstremalnym (F.21), odzwierciedla wielkość ruchu kierowanego w danej relacji dla danego typu usługi (połączenia lokalne, międzystrefowe z pojedynczym i podwójnym tranzytem). Dla przypadku połączeń międzynarodowych skonstruować możemy model analogiczny do (F.23) z tą tylko różnicą, że uwzględniał on będzie funkcję obciążenia linii G:

$$\aleph_{AiC} = \frac{\sum_{p \in Profile} G_{Cp} \cdot w_p \cdot U^{C}_{p}}{\sum_{k \in Kraje} \sum_{p \in Profile} G_{kp} \cdot w_p \cdot U^{k}_{p}} \tag{F.40}$$

F.3.3 Przypadek Konkurencji

Rozważając przypadek konkurencji należy raz jeszcze zwrócić uwagę na wcześniej poczynione rozróżnienie dwóch rodzajów abonentów, jak i dwa rodzaje substytucji.

Model popytu: abonenci operatora

Jeżeli podjęcie decyzji dotyczącej wyboru operatora wiąże abonenta z tym operatorem okresową umową, toteż możemy założyć, iż po jej podjęciu wybrany operator jest okresowym monopolistą wobec abonenta, który go wybrał. Tak więc jedynym rodzajem substytucji, jaki po podjęciu takiej decyzji może wystąpić, jest substytucja wewnętrzna – między usługami – Γ, okresami czasowymi – H i dniami tygodnia – Θ. Wniosek stąd, iż dla tej sytuacji model funkcji popytu będzie identyczny jak w sytuacji monopolu (F.24).

Rzecz ma się podobnie z modelem rozpływu ruchu. Forma rynku (monopol, duopol, konkurencja) w strefie docelowej nie ma wpływu na wielkość ruchu do niej kierowanego. A jeśli nawet, to tylko pośrednio, poprzez wpływ na liczbę abonentów U, ich profil p, lub też gęstość telefoniczną γ, co w naszym przypadku sprowadza się do wpływu na wartość funkcji obciążenia linii G. Tak więc w przypadku konkurencji z abonentami operatora, model rozpływu ruchu wyrażał się będzie zależnością (F.38), a dla ruchu międzynarodowego zależnością (F.40).

Różnica dotyczyła będzie tu modelu liczby abonentów.

Oferty operatorów są wzajemnie konkurencyjnie. Istnieje substytucja między usługami przez nich świadczonymi (usługa u świadczona przez operatora A może być zastąpiona przez usługę u lub inną, świadczoną przez operatora B). Ta konkurencyjność usług świadczonych przez operatorów prowadzi do konkurencyjności samych operatorów. Mamy więc tu do czynienia z substytucją zewnętrzną – *substytucją między operatorami*. Substytucja ta wpływa na liczbę abonentów danego operatora. Wprowadźmy zatem, poprzez analogię do punktów wcześniejszych funkcję, którą będziemy nazywać *funkcją substytucji między operatorami* – Ω_{Aip}. Funkcja ta będzie przyjmowała wartość tym większą, im korzystniejszą ofertę dla abonenta o profilu p przedstawiał będzie w strefie i-tej operator A. Do zdefiniowania tej funkcji wykorzystamy wprowadzoną wcześniej funkcję względnej wartości usługi – f, którą tu nazywać będziemy *funkcją względnej wartości operatora* lub też *funkcją Ω-względnej wartości operatora*. Analityczną postać funkcji substytucji między operatorami, wykorzystującą funkcję Ω-względnej wartości operatora wyraża zależność:

$$\Omega_{Aip} = \frac{f_p^{\Omega}(\Re_{Aip}, s_{AA}^{\Omega})}{\sum_{O \in Operatorzy} f_p^{\Omega}(\Re_{Aip}, s_{OA}^{\Omega})} \tag{F.41}$$

Istotnym jest, iż w równaniu (F.41) za cenę podstawiliśmy cenę zaagregowaną $\Re$. Wynika to z faktu, iż decyzję o byciu abonentem danego operatora abonenci podejmują w oparciu o całościową wizję tegoż operatora, a więc i w oparciu o wszystkie elementy kosztów, jakie przyjdzie im ponosić.

Korzystając ze zdefiniowanej funkjci Ω-względnej wartości operatora (F.41) model liczby abonentów wyrazimy równaniem:

$$U_{Aip} = \hat{U}_{Aip} \cdot \Omega_{Aip} \tag{F.42}$$

Przy czym $\hat{U}_{Aip}$ wyraża się zależnością (F.37).

Model popytu: abonenci usługi

W sytuacji, gdy mamy do czynienia z abonentami mogącymi korzystać jednocześnie z usług świadczonych przez różnych operatorów, występuje zarówno substytucja wewnętrzna, jak i zewnętrzna. Tu abonenci nie wybierają danego operatora na stałe, ale dla każdej usługi niezależnie[30]. Fakt ten można zamodelować w sposób następujący.

Załóżmy, iż abonenci należą do wszystkich operatorów jednocześnie (sytuacja analogiczna do tej, gdy operatorzy łączą się stając się jednym wielkim monopolistą). W pewnym sensie jest tak w rzeczywistości i nasze założenie nie jest niczym szczególnym. Tak więc w takiej sytuacji, dla każdego z operatorów model liczby abonentów będzie identyczny, jak dla przypadku monopolu[31] (F.37).

W takiej sytuacji, poszczególne usługi świadczone przez jednego operatora będą konkurowały (relacja substytucji) zarówno miedzy sobą, tzn. wszystkimi usługami świadczonymi przez tegoż

[30] W szczególnych przypadkach wręcz dla każdorazowo nawiązanego połączenia.

[31] Zasadność takiego podejścia może na pierwszy rzut oka wydawać się niezrozumiała. W tym podejściu zakładamy, iż substytucja zewnętrzna wpływ ma nie, jak to było w przypadku konkurencji z abonentami operatora, na liczbę abonentów, lecz na wielkość ruchu przez nich generowanego. Jest to, jak się zdaje, podejście bliższe rzeczywistości. Jesteśmy – potencjalnie – abonentami każdego z operatorów międzystrefowych. Atrakcyjność ich oferty nie ma wpływu na ten fakt. Ma natomiast wpływ na to, czy i w jakim stopniu będziemy z ich usług korzystać, czyli na wielkość ruchu generowanego.

operatora (substytucja wewnętrzna), jak i między wszystkimi usługami świadczonymi przez pozostałych operatorów, z których oferty korzystać może abonent.

Tak więc, wyrażając funkcję popytu zależnością (F.24), a jej poszczególne składniki zależnościami (F.25) i (F.26), owe dwa rodzaje substytucji uwzględnić możemy poprzez modyfikację pierwotnej postaci funkcji Γ, H i Θ – substytucji. Modyfikacja ta sprowadzać się będzie do dołożenia w mianowniku tych funkcji dodatkowego sumowania po wszystkich operatorach. Tak zmodyfikowane funkcje substytucji przedstawiają poniższe zależności.

$$\Gamma_{Aiputn} = \frac{f^{\Gamma}_{ptn}(P_{Aiputn}, s^{\Gamma}_{uu})}{\sum_{g \in Usugi} \sum_{O \in Operatorzy} f^{\Gamma}_{ptn}(P_{Oipgtn}, s^{\Gamma}_{gu})}, \tag{F.43}$$

$$H_{Aiputn} = \frac{f^{H}_{pun}(P_{Aiputn}, s^{H}_{tt})}{\sum_{k \in Okresy} \sum_{O \in Operatorzy} f^{H}_{pun}(P_{Oipukn}, s^{H}_{kt})}, \tag{F.44}$$

$$\Theta_{Aiputn} = \frac{f^{\Theta}_{put}(P_{Aiputn}, s^{\Theta}_{nn})}{\sum_{d \in Dni} \sum_{O \in Operatorzy} f^{\Theta}_{put}(P_{Oiputd}, s^{\Theta}_{dn})}. \tag{F.45}$$

F.4 Uwagi końcowe do modelu

O trafności przyjętych założeń, słuszności wprowadzonych zależności, czy wreszcie rzetelności analizy tematu zawyrokować jedynie może solidna konfrontacja z rzeczywistością. Tej jednakże uczynić nie można nie posiadając stosownych danych, będących właściwym śladem faktów. Autor niniejszej pracy na dzień dzisiejszy nie jest ich posiadaczem, stąd też praca nad tematem z konieczności na tym etapie musi się zatrzymać.

Zakończenie

U początków pracy nad tematem stały założenia możliwości całościowego ujęcia sytuacji konkurencji na rynku telekomunikacyjnym. Wzgląd na rozmiar pracy, jak również ograniczenia czasowe przyczyniły się do zawężenia zakresu badanego zagadnienia. Mimo tej istotnej zmiany zasadnicze tezy pracy znajdują uzasadnienie w jej treści.

- *Analiza konkurencyjna rynku usług telekomunikacyjnych może dać lepsze rezultaty w procesie ustalania stawek rozliczeniowych za połączenia międzyoperatorskie, niż analiza oparta wyłącznie na kosztach świadczenia usług.*

  Operujące na rynku przedsiębiorstwa telekomunikacyjne oceniają swoje decyzje z punktu widzenia wielu kryteriów, dążąc między innymi do:

  - maksymalizacji zysku
  - maksymalizacji udziału w rynku
  - minimalizacji kosztów świadczenia usług
  - optymalizacji rozpływu ruchu w sieci.

  Realizacja każdego z wyżej wymienionych celów zależna jest od tego, jak użytkownicy sieci reagowali będą na zmieniające się ceny za usługi. Wielkość generowanego przez nich ruchu wpływa bezpośrednio na stopień realizacji każdego z powyższych celów. Wielkość ponoszonych przez operatorów kosztów wpływa jedynie na dwa spośród nich - zysk i efektywność kosztową.

  Ceny detaliczne i stawki rozliczeniowe stanowią swoistą strategię gry przedsiębiorstw telekomunikacyjnych. Wyniki, jakie w grze rynkowej poszczególni gracze osiągają, uzależnione są od ich oraz od decyzji konkurencyjnych graczy. Analiza konkurencyjna - analiza możliwych interakcji pomiędzy decyzjami graczy, racjonalnie uzasadniony wybór najlepszych strategii uprzedzających oraz poprzedzających decyzje konkurentów uwalniają przedsiębiorstwa telekomunikacyjne od całkowitej przypadkowości uzyskiwanych rozwiązań, od wpadania w pułapki, do jakich prowadzi indywidualistyczna racjonalność, a wreszcie daje szanse uzyskiwania rozwiązań efektywnych i stabilnych, a w najgorszym przypadku informuje, że takich rozwiązań się jeszcze nie uzyskało. Wybór strategii cenowej wyłącznie w oparciu o ponoszone koszty jest „ślepy” na powyższe zalety analizy konkurencyjnej.

- *Modelowanie i analiza popytu na usługi telekomunikacyjne w połączeniu z analizą kosztów świadczenia tych usług prowadzi do bardziej skutecznego działania na rynku.*

  W rozdziale 3 przedstawiono szereg narzędzi wspierających graczy rynkowych w procesie ustalania cen na rynkach detalicznych oraz negocjacji stawek rozliczeniowych na rynkach hurtowych w tym: kryteria wyboru strategii cenowych, z uwzględnieniem rekomendowanych przez regulatora stawek rozliczeniowych, metody regularyzacji rozwiązań niejednoznacznych, metody szacowania korzyści związanych ze zmianą momentu ustalenia cen na rynkach detalicznych i finalizacji procesu negocjacji stawek na rynkach hurtowych z uwzględnieniem siły negocjacyjnej stron negocjacji. Narzędzia te operują na macierzy wypłat, do konstrukcji której koniecznym jest zbudowanie modelu popytu na usługi telekomunikacyjne i/lub modelu kosztów ich świadczenia.

- *Modele rozwiązywania sytuacji konfliktowych oparte o teorię gier dają się stosować do lepszego zrozumienia i rozwiązywania problemów konkurencyjnych na rynku usług telekomunikacyjnych.*

  Analiza przeprowadzona w Rozdziale 2 umożliwiła nam dokonanie klasyfikacji sytuacji konkurencji na rynku usług telekomunikacyjnych w zależności od tego, jaką informację na temat konkurentów posiada dane przedsiębiorstwo telekomunikacyjne. Rezultatem tej analizy były klasyczne dla teorii gier jednokryterialne modele *gry przeciwko naturze* oraz *N-osobowej gry o sumie niezerowej*, a w przypadku rozpatrywania wielu kryteriów oceny - *model gry wielokryterialnej.*

  Właściwa klasyfikacja sytuacji konkurencyjnej jest warunkiem koniecznym zrozumienia jej podstawowych właściwości. Zaś dobre zrozumienie problemu stanowi niezbędny punkt wyjścia w procesie jego rozwiązywania.

Niniejsza praca nie wyczerpuje zagadniania wspomagania procesu ustalania cen detalicznych i negocjacji stawek rozliczeniowych na konkurencyjnym rynku usług telekomunikacyjnych. Istotne kierunki dalszych badań nakreślone zostały w rozdziale 4. Do realizacji celów przez te kierunki wyznaczonych niniejsza praca stanowi niewątpliwe dobry punkt wyjścia.

Bibliografia

[1] Neil Abragimowicz. *Modele symulacyjne i optymalizacyjne wspomagające ustalanie taryf telekomunikacyjnych w połączeniach międzyoperatorskich.* Praca dyplomowa, Politechnika Warszawska Wydział Elektroniki i Technik Inforamacyjnych Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Warszawa, 1999.

[2] Wojciech Apel. Rozliczenia międzyoperatorskie z punktu widzenia operatora sieci internet. *Czwarta konferencja na temat: Międzynarodowe i polskie doświadczenia w zakresie połączeń międzyoperatorskich*, Warszawa, 2000. Instytut Łączności.

[3] Dariusz Bakiera, Henryk Lasota, Ryszard Weisbrodr. Proces programowania rozwoju lokalnych sieci dostępowych. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1998.

[4] Włodzimierz Barjasz. Liberalizacja (unbundling) dostępu lokalnego. *Matariały z czwartej konferencji na temat: Międzynarodowe i polskie doświadczenia w zakresie połączeń międzyoperatorskich*, Warszawa, 2000. Instytut Łączności.

[5] Włodzimierz Barjasz, Franciszek Kamiński. Telekomunikacja w Polsce - rzeczywistość i oczekiwania. *Telekomunikacja i Techniki Informacyjne*, 1-2, 2003.

[6] John Bean. Evolution of uk interconnection. *The fourth Conference on: International and Polish Experiences on Interconnetion Issues*, Warsaw, 2000. National Institute of Telecommunications.

[7] David Begg, Stanley Fischer, Rudiger Dornbusch. *Makroekonomia.* Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa, 1993.

[8] David Begg, Stanley Fischer, Rudiger Dornbusch. *Mikroekonomia.* Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa, 1999.

[9] Damian Biedulski. Wpływ liberalizacji na zasady rozliczeń międzyoperatorskich. *Trzecia konferencja na temat: Międzynarodowe i polskie doświadczenia w zakresie połączeń międzyoperatorskich*, Warszawa, 1999. Instytut Łączności.

[10] Vera F. Birkenbihl. *Komunikacja Werbalna - psychologia prowadzenia negocjacji.* Wydawnictwo Astrum, Wrocław, 1997.

[11] Andrzej Bąk, i in. Szybkie sieci danych. Raport Instytutowy, CITCOM-PW, Warszawa, 1996.

[12] Antoni J. Boglewski. Porównanie kosztów różnych rozwiązań sieci telekomunikacyjnych wraz z wpływami za usługi tych sieci. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1999.

[13] Antoni J. Boglewski. Propozycja teorii optymalizowania działalności operatora. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2001.

[14] Wojciech Borucki, Czesław Jędrzejek, Witold Hołubowicz. Operatorzy telekomunikacyjni w Polsce - aspekty współpracy i konkurencji. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2000.

[15] Wojciech Borucki, Monika Klama. Wybrane alianse operatorów telekomunikacyjnych. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1997.

[16] Wojciech Borucki, Grzegorz Tobiasz. Wybrane problemy rozliczeń między operatorami telekomunikacyjnymi. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1997.

[17] Wojciech Borucki, Grzegorz Tobiasz, Barbara Nadrowska, Aleksandra Wudkiewicz. Metodyka prognozowania zapotrzebowania na usługi telekomunikacyjne. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1997.

[18] Wojciech Borucki, Grzegorz Tobiasz, Lech Wozich, Przemysław Zaprzalski. Wybrane problemy współpracy między operatorami sieci telekomunikacyjnych. Raport Instytutowy, Francusko-Polska Wyższa Szkoła Nowych Technik Informatyczno-Komunikacyjnych, Instytut Technik Telekomunikacyjnych i Informatycznych Sp z.o.o., Poznań, 1996.

[19] Krzysztof M. Brzeziński. *Sieci lokalne.* OWPW, Warszawa, 1995.

[20] Romuald Car. Połączenia międzysieciowe - punkt widzenia operatora lokalnego na problemy współpracy i rozliczeń. *Trzecia konferencja na temat: Międzynarodowe i polskie doświadczenia w zakresie połączeń międzyoperatorskich*, Warszawa, 1999. Instytut Łączności.

[21] Michael Carter, Julian Wright. Bargaining over interconnection: the clear-telecom dispute. Working Paper 13, Centre for Research in Network Economics and Communications, University of Auckland, 2000.

[22] Douglas E. Comer. *Sieci Komputerowe i Intersieci.* Wydawnictwo Naukowo Techniczne, Warszawa, 2000.

[23] *Commission recommendation on relevant product and service markets within the electronic communications sector susceptible to* ex ante *regulation in accordance with Directive 2002/21/EC of the European Parliament and of the Council on a common regulatory framework for electronic communication networks and services.* Official Journal of the European Union, 2003.

[24] David Cray, Gregory E. Kersten. Negotiating inefficient compromises: Is less better than more. Interim Report IR-99-022, IIASA, Laxenburg, Austria, 1999.

[25] Bogusław Czarny, Elżbieta Czarny, Ryszard Bartkowiak, Ryszard Rapacki. *Podstawy Ekonomii.* PWE, Warszawa, 1998.

[26] Andrzej Dąbrowski, i in. *Systemy i Sieci SDH.* WKŁ, Warszawa, 1996.

[27] Marek Dąbrowski, Monika Król. Taryfikacja w sieci internet. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1999.

[28] Marian Dąbrowski. Systemy komórkowe GSM. Raport Instytutowy, CITCOM-PW, Warszawa, 1994.

[29] Marian Dąbrowski. Systemy komórkowe. Raport Instytutowy, CITCOM-PW, Warszawa, 1996.

[30] Marian Dąbrowski. Sieci telekomunikacyjne: kierunki rozwoju. Raport Instytutowy, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Telekomunikacji, Warszawa, 1999.

[31] Marian Dąbrowski. Sieci komórkowe do roku 2001. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2001.

[32] *Directive 2002/19/EC of the European Parliament and of the Council on access to, and interconnection of, electronic communications networks and associated facilities.* Official Journal of the European Communities, 2002.

[33] Decision theory and games. `www.actuarial.unsw.edu.au/courses/actl3003/documents/LectureNotes/lecturenote10.pdf`.

[34] Jerzy Dietl, Wojciech Gasparski, i in. *Etyka Biznesu.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1999.

[35] Bill Dixon. Element-base costing for interconnection. *The third Conference on International and Polish Experiences on Interconnetion Issues*, Warsaw, 1999. National Institute of Telecommunications.

[36] Bill Dixon. Interconnect for advanced products and services. *The third Conference on International and Polish Experiences on Interconnetion Issues*, Warsaw, 1999. National Institute of Telecommunications.

[37] Jerzy Dudek, Nowak Ludomir. Wybrane aspekty harmonizacji wymagań krajowych z normami Unii Europejskiej w dziedzinie telekomunikacyjnych urządzeń końcowych. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2001.

[38] Krzysztof Dyl. Współpraca międzyoperatorska - spory międzyoperatorskie i rola regulatora w ich rozstrzyganiu. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2002.

[39] *Dyrektywa 95/62/EC Parlamentu Europejskiego i Rady z 13 grudnia 1995 o stosowaniu zasady otwartych sieci (ONP) w telefonii głosowej*. Dziennik Urzędowy Wspólnot Europejskich, 1995.

[40] *Dyrektywa 97/33/WE Parlamentu Europejskiego i Rady z 30 czerwca 1997r, w sprawie interconnection w dziedzinie telekomunikacji w kontekście udostępnienia uniwersalnych usług i interoperacyjności poprzez zastosowanie zasad ONP*. Dziennik Urzędowy Wspólnot Europejskich, 1997.

[41] Nicholas Economides, Giuseppe Lopomo, Glenn Woroch. Strategic commitments and the principle of reciprocity in interconnection pricing. Discussion Paper EC-96-13, Stern School of Business, New York University, 1996.

[42] Nicholas Economides, Giuseppe Lopomo, Gnlenn Woroch. Regulatory pricing rules to neutralize network dominance. *Industrial and Corporate Change*, 1996.

[43] R. Faure, J.P. Boss, A. Le Garf. *Badania operacyjne*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1982.

[44] Mirosław Fereniec. Analiza systemów rozliczeniowych w wybranych krajach Unii Europejskiej. Raport Instytutowy, Instytut Łączności, Warszawa, 1999.

[45] Mirosław Fereniec. Propozycje rozliczeń za połączenia międzysieciowe dla polskich operatorów sieci telefonicznych, wynikające z doświadczeń europejskich. *Trzecia konferencja na temat: Międzynarodowe i polskie doświadczenia w zakresie połączeń międzyoperatorskich*, Warszawa, 1999. Instytut Łączności.

[46] Mirosław Fereniec. Kierunki zmian rozliczeń miedzyoperatorskich w Polsce na tle rozliczeń w krajach ue. *Czwarta konferencja na temat: Międzynarodowe i polskie doświadczenia w zakresie połączeń międzyoperatorskich*, Warszawa, 2000. Instytut Łączności.

[47] Mirosław Fereniec. Nowa ustawa regulująca działalność telekomunikacyjną w Polsce - „prawo telekomunikacyjne". *Telekomunikacja i Techniki Informacyjne*, 3-4, 2000.

[48] Mirosław Fereniec. Rozliczenia międzyoperatorskie w krajach Unii Europejskiej i w Polsce. *Telekomunikacja i techniki Informacyjne*, 3-4, 2000.

[49] Mirosław Fereniec. Rozliczenia między operatorami sieci telefonicznych a dostawcami usług internetowych - isp. *Przegląd Telekomunikacyjny*, 12, 2001.

[50] Mirosław Fereniec. Podstawowe zasady i metody kształtowania rozliczeń między operatorami. *Telekomunikacja i Techniki Informacyjne*, 1-2, 2003.

[51] Roger Fisher, William Ury, Bruce Patton. *Dochodząc do TAK - Negocjowanie bez poddawania się*. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa, 2000.

[52] Krzysztof Fleszar. *Zastosowanie analizy wielokryterialnej do wspomagania decyzji strategicznych*. Praca magistarska, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Warszawa, 2001.

[53] *Framework Interconnection Agreement Guidelines*. The European Telecomunications Platform, 1998.

[54] Rafał Galiński. System regulacji prawnych a problem infrastruktury telekomunikacyjnej w Polsce. *Trzecia konferencja na temat: Międzynarodowe i polskie doświadczenia w zakresie połączeń międzyoperatorskich*, Warszawa, 1999. Instytut Łączności.

[55] Przemysław Gamdzyk, Sławomir Kosieliński. Operatorzy bez sieci. `www.computerworld.pl/artykuly/26121.html`, 2002.

[56] Justyna Gączyńska. Powszechna usługa telekomunikacyjna w warunkach libaralizacji rynku telekomunikacyjnego Unii europejskiego po 1 stycznia 1998 roku. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1997.

[57] Justyna Gączyńska. Taryfy jako element regulacji państwa w sektorze telekomunikacyjnym. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1997.

[58] Justyna Gączyńska. Zmiany zasad i zakresu regulacji rynku telekomunikacyjnego Unii Europejskiej w okresie jego transformacji. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1999.

[59] Janusz Granat. *Metody interakcji z użytkownikiem w wielokryterialnych systemach wspomagania decyzji*. Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Warszawa, 1997.

[60] Janusz Granat, Andrzej P.Wierzbicki. Interactive specification of dss user preferences in terms of fuzzy sets. Raport Instytutowy WP-94-29, IIASA, Laxenburg, Austria, 1994.

[61] Janusz Granat, Andrzej P. Wierzbicki. Komputerowe narzędzia do wspomagania decyzji w sektorze telekomunikacyjnym. *Telekomunikacja i Techniki Informacyjne*, 3-4, 2000.

[62] Janusz Granat, Andrzej P. Wierzbicki. Wybrane zastosowania technik wspomagania decyzji w sektorze telekomunikacyjnym. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2000.

[63] Mariusz Grecki, Piotr Bączyk. Przetwarzanie danych bilingowych dla potrzeb inżynierii ruchu. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1998.

[64] Annegret Groebel. Accompanying the evolving competition: regulatory interconnection decisions and their impact on the telecoms market. *The third conference on International and Polish Experiences on Interconnetion Issues*, Warsaw, 1999. National Institute of Telecommunications.

[65] Jan Guz. Wpływ konkurencji na rozwój operatora dominującego. *Euro Forum, Polish Telecoms*, 1998.

[66] Richard Harris. Polish telecommunication policy from european perspective. *The third conference on International and Polish Experiences on Interconnetion Issues*, Warsaw, 1999. National Institute of Telecommunications.

[67] Benjamin E. Hermalin, Michael L. Katz. Network interconnection with two-sided user benefits. Working paper, University of California, 2001.

[68] Tim Hindle. *Skuteczne Negocjacje*. Wydawnictwo Wiedza i Życie, Warszawa, 2000.

[69] W. Hołubowicz, P. Płóciennik. *GSM cyfrowy system telefonii komórkowej*. EFP, Poznań, 1995.

[70] Jan Paweł II. *Encyklika: Centesimus Annus*. Znak, Kraków, 2000.

[71] Dipak C. Jain, Eitan Muller, Naufel J. Vilcassim. Princing patterns of cellular phones and phonecalls: A segment-level analysis. *Management Science*, 45(2), feb 1999.

[72] Andrzej Jajszczyk, Maciej Wachowski. Klasyfikacja nowoczesnych usług telekomunikacyjnych. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1997.

[73] Alicja Jarugowa, Irena Sobańska, Renata Sochacka. *Metody kalkulacji - koszty, ceny, decyzje*. Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa, 1991.

[74] Artur Jarzyński. *Rozliczenia między operatorami jako element problematyki współpracy i współdziałania sąsiadujących telekomunikacyjnie operatorów sieci*. Praca dyplomowa, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Inforamacyjnych Instytut Telekomunikacji, 1997.

[75] Czesław Jędrzejczek, Witold Hołubowicz, Wojciech Borucki, Krzysztof Samp. Sieci dostępowe dla usług wąsko- i szerokopasmowych. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1999.

[76] Jerzy Kalinowski. Bariery i ryzyko w inwestycjach telekomunikacyjnych w Polsce. *Euro Forum, Polish Telecoms*, 1998.

[77] Franciszek Kamiński. Regulacje w telekomunikacji a liberalizm gospodarczy. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1997.

[78] Franciszek Kamiński. Prawo telekomunikacyjne a prawo o konkurencji. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1998.

[79] Franciszek Kamiński. Aspekty regulacyjne procesu konwergencji telekomunikacji i dziedzin pokrewnych. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1999.

[80] Franciszek Kamiński. Społeczne przesłanki polityki telekomunikacyjnej Unii Europejskiej. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1999.

[81] Franciszek Kamiński. Regulacje a bezpieczeństwo inwestycji w sektorze telekomunikacyjnym. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2000.

[82] Franciszek Kamiński. Kierunki zmian w regulacjach Unii Europejskiej w obszarze komunikacji elektronicznej. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2001.

[83] Franciszek Kamiński. Powszechna usługa telekomunikacyjna w Unii Europejskiej i w Polsce. *Telekomunikacja i Techniki Informacyjne*, 1-2, 2003.

[84] Jacek Kamiński. Negocjacje jako proces etyczny. Biuletyn informacyjny Zespołu Etyki Biznesu 65, Towarzystwo Naukowe Prakseologii, Warszawa, 2002. `www.cebi.win.pl/texty/listopad02.doc`.

[85] Janusz M. Kamiński. Interconnect. *Telecom Forum*, 1999. `www.telecomforum.pl/9978/20.htm`.

[86] Jan Karasek. Znaczenie modelowania finansowego w inwestycjach telekomunikacyjnych. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1997.

[87] Jan Karasek, Tomasz Szymański. Wpływ alokacji kosztów na rozliczenia międzyoperatorskie. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1999.

[88] Gregory E. Kersten, Geoff R. Mallory. Rational inefficient compromises in negotiation. Interim Report IR-98-024, IIASA, Laxenburg, Austria, 1998.

[89] Katarzyna Kieślich. Nowe prawo telekomunikacyjne. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2001.

[90] Monika Klama, Agnieszka Puchała. Usługa na miarę - marketing zróżnicowany, marketing bezpośredni w telekomunikacji. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1997.

[91] Renata Kłosowska. Badanie świadomości telekomunikacyjnej dzieci w wieku młodszoszkolnym. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2001.

[92] Ryszard Krajewski. Aspekty techniczno-ekonomiczne związane z wprowadzaniem usług szerokopasmowych. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2000.

[93] Tomasz Kręglewski, Janusz Granat, Andrzej P. Wierzbicki. *IAC-DIDAS-N, A Dynamic Interactive Decision Analysis and Support System for Multicriteria Analysis of Nonlinear Models*, wolumen 4.0. IIASA, Laxenburg, Austria, 1991.

[94] Jerzy Kubasik. O potrzebie regulacji cen usług telekomunikacyjnych w warunkach konkurencji. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1997.

[95] Jerzy Kubasik. Taryfy dla usług telefonii komórkowej w Europie. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1998.

[96] Jerzy Kubasik. Relacje cen usług telefonicznych w wybranych krajach. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1999.

[97] Jerzy Kubasik. Ewolucja taryf telefonicznych TP S.A. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2000.

[98] Jerzy Kubasik. Ewolucja taryf telefonicznych SPT Telecom i Matáv w latach 1992-99. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2001.

[99] Jean Jacques Laffont, Jean Tirole. Libéralisation et charges d'accès. *Annales des Télécommunications*, 50(2):306–314, 1995. Tekst tłumaczony.

[100] Tracy LaQuey, Jeanne C. Ryer. *Internet i Okolice: przewodnik po światowych sieciach komputerowych*. Biznet Poland, Inc., Warszawa, 1994.

[101] Sylwester Laskowski. Interconnection. Publikacja www, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Warszawa, 1999. `www.ia.pw.edu.pl/~slaskows`.

[102] Sylwester Laskowski. O elastyczności popytu na usługi telekomunikacyjne. Publikacja www, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Warszawa, 2000. `www.ia.pw.edu.pl/~slaskows`.

[103] Sylwester Laskowski. Metody wielokryterialnego wspomagania decyzji wsparciem w procesie przygotowywania negocjacji dotyczących połączeń międzyoperatorskich. Publikacja www, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Warszawa, 2001. `www.ia.pw.edu.pl/~slaskows`.

[104] Sylwester Laskowski. Model popytu na usługi telekomunikacyjne - errata i suplement. Publikacja www, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Warszawa, 2001. `www.ia.pw.edu.pl/~slaskows`.

[105] Sylwester Laskowski. Modeling of demand on telecommunication services. Publikacja www, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Warsaw, 2001. `www.ia.pw.edu.pl/~slaskows`.

[106] Sylwester Laskowski. Modelowanie popytu na usługi telekomunikacyjne. Publikacja www, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Warszawa, 2001. `www.ia.pw.edu.pl/~slaskows`.

[107] Sylwester Laskowski. Koncepcja operatora najbardziej obiecującego. Raport Instytutowy 02-13, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Warszawa, 2002.

[108] Sylwester Laskowski. Kryteria wyboru strategii w grach przeciwko naturze. Raport Instytutowy 02-10, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Warszawa, 2002.

[109] Sylwester Laskowski. O modelowaniu popytu na usługi telekomunikacyjne. Raport Instytutowy 02-11, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Warszawa, 2002.

[110] Sylwester Laskowski. O roli informacji w grach 2×2. Raport Instytutowy 02-12, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Warszawa, 2002.

[111] Sylwester Laskowski. Model popytu na usługi telekomunikacyjne. *Telekomunikacja i techniki Informacyjne*, 1(2), 2003.

[112] Sylwester Laskowski. Game against nature: playing on competitive telecommunications services market without knowledge of competitors' costs. *The Fourth International Conference on Decision Support for Telecommunications and Information Society*, Warsaw, 2004. National Institute of Telecommunications.

[113] Sylwester Laskowski. Niewystaraczalność podejścia kosztowego w procesie ustalania cen za usługi telekomunikacyjne. *Ósma Międzynarodowa Konferencja na temat: Międzynarodowe i polskie doświadczenia w zakresie połączeń międzyoperatorskich*, Warszawa, 2004. Instytut Łączności.

[114] Józef Lubacz. *W drodze do Społeczeństwa Informacyjnego.* Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1999.

[115] Xavier Mancero, Eduardo Saavedra. Entry, cream skimming, and competition: Theory and simulation for Santiago de Chile's local telephony market. Raport Instytutowy, Instituto Latinoamericano de Doctrina y Estudios Sociales, 2001. `www.ilades.cl/economia/publicaciones/ser_inv/inv132.pdf`.

[116] Paweł Markowski, Tomasz Olczyk. Negocjacje czyli rozmowa. Raport Instytutowy, Fundacja Rozwoju Demokracji Lokalnej, 2003. `www.frdl.org.pl/downloads/negoc4_vadem/vade4_0301234.pdf`.

[117] Jacek W. Mercik. *Siła i oczekiwania, decyzje grupowe.* PWN, Wrocław, 1999.

[118] Krzysztof Śmiatacz. Programy lojalnościowe operatorów telefonii komórkowej w Polsce - charakterystyka porównawcza i ocena ich efektywności w świetle badań. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2003.

[119] Nina Michalak, Grzegorz Kantowicz. Operatorzy telekomunikacyjni na polskim rynku - więcej konkurencji czy współpracy. *INFOTEL*, 7-8, 2000.

[120] Jadwiga Michna. Zasady współpracy i rozliczeń między operatorami telekomunikacyjnymi. Raport Instytutowy, Instytut Łączności, Warszawa, 1997.

[121] Izabela Mileńko. *Zagadnienia wspomagania indywidualnego planowania generacji wytwórców na rynku energii elektrycznej.* Praca magisterska, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Warszawa, 2000.

[122] Richard John Neuhaus. *Biznes i Ewangelia.* W drodze, Poznań, 1994.

[123] Roman Nierebiński. Prognozowanie rozwoju usług telekomunikacyjnych w Polsce w oparciu o różne modele ekonometryczne. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1998.

[124] Roman Nierebiński. Prognozowanie rozwoju nowych usług telekomunikacyjnych. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1999.

[125] Roman Nierebiński. Polska w Europie - stan obecny i prognozy rozwoju telekomunikacji. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2000.

[126] Roman Nierebiński. Analiza rozwoju ruchu telefonicznego w Europie i w Polsce. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2001.

[127] Roman Nierebiński. Prognozy rozwoju międzynarodowego ruchu telefonicznego w Polsce. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2001.

[128] Edward Nowak. *Teoria kosztów w zarządzaniu przedsiębiorstwem.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1996.

[129] Janusz Nowak. Możliwości, jakie stwarza zastosowanie nowych metod zarządzania i organizowania procesów pracy w dużych organizacjach gospodarczych takich jak TP S.A. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1998.

[130] Bogdan Nowopolski. Trendy i kierunki rozwoju systemów bilingowych. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2000.

[131] Włodzimierz Ogryczak. Wspomaganie decyzji w warunkach ryzyka. Skrypt wykładu, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Warszawa, 2002.

[132] Jarosław Okrągły. Liberalizacja rynku usług międzymiastowych. *Euro Forum, Polish Telecoms*, 2-3, 1998.

[133] Frederic Ouradou. French case: cost based approach for setting interconnection charges. *The third conference on International and Polish Experiences on Interconnetion Issues*, Warsaw, 1999. National Institute of Telecommunications.

[134] A. Pach, i in. *Współpraca sieci ATM z innymi systemami telekomunikacyjnymi.* Wydawnictwo Fundacji Postępu Telekomunikacji, Kraków, 1995.

[135] Andrzej Płachecki. Rozwój rynku telekomunikacyjnego w Polsce a rozliczenia międzyoperatorskie. *Trzecia konferencja na temat: Międzynarodowe i polskie doświadczenia w zakresie połączeń międzyoperatorskich*, Warszawa, 1999. Instytut, Łączności.

[136] Andrzej J. Piotrowski. Łączmy się sprawiedliwie. *Telecom Forum*, 4, 1999.

[137] Andrzej J. Piotrowski. Telekomunikacja - koszty i opłaty. *Telecom Forum*, 3, 96.

[138] Stanisław Piątek. *Prawo telekomunikacyjne Wspólnoty Europejskiej.* Wydawnictwo C.H.Beck, Warszawa, 2003.

[139] Renata Piwowarska. *Prawna ochrona konkurencji i przeciwdziałanie praktykom monopolistycznym na rynku telekomunikacyjnym w Polsce.* Praca magisterska, Uniwersytet Warszawski, Wydział Zarządzania, Warszawa, 1999.

[140] *Prawo Telekomunikacyjne.* C.H.Beck, 2003.

[141] B. Ricardo Raineri. Network competition: a general equilibrium analysis. Raport Instytutowy, Encuentro de la Sociedad de Economia de Chile, 2003. `www.econmeetings.cl/pdf/sesion111raineri.pdf`.

[142] Bernard Roy. *Wielokryterialne wspomaganie decyzji.* Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1990.

[143] Paweł Rzepka. Miejsce operatora narodowego w systemie regulacji prawnych sektora telekomunikacyjnego w Polsce. *Trzecia konferencja na temat: Międzynarodowe i polskie doświadczenia w zakresie połączeń międzyoperatorskich*, Warszawa, 1999. Instytut, Łączności.

[144] Jerzy Sadowski. Sposób dochodzenia do zasad rozliczeń pomiędzy operatorem sieci komórkowej i operatorem sieci stacjonarnej o znaczącej pozycji rynkowej. *Trzecia konferencja na temat: Międzynarodowe i polskie doświadczenia w zakresie połączeń międzyoperatorskich*, Warszawa, 1999. Instytut, Łączności.

[145] Frank Schmidt. Local loop unbunling - opening local telecommunications martkets for competition. *The third conference on International and Polish Experiences on Interconnetion Issues*, Warsaw, 1999. National Institute of Telecommunications.

[146] Frank Schmidt, Florentin González López. An analytical cost model for the national core network. Consultative document prepared by wik for the regulatory authority for telecommunications and posts, Wissenschaftliches Institut für Kommunikationsdienste GmbH, 1999.

[147] Marek Siudak. *Badania Operacyjne*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1998.

[148] Vasiliki Skreta. Interconnection negotiations between telecommunication networks and universal service objectives. Raport Instytutowy, University of Minnesota, 2002. `www.econ.umn.edu/~screta/data/net.pdf`.

[149] Andrzej Stachurski, Andrzej P. Wierzbicki. *Podstawy optymalizacji*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1999.

[150] Grzegorz Stanisławski. Działalność i rozwój TP S.A. w warunkach liberalizacji rynku telekomunikacyjnego w Polsce. *Euro Forum, Polish Telecoms*, 1998.

[151] Philip D. Straffin. *Teoria gier*. Wydawnictwo Naukowe Scholar, Warszawa, 2001.

[152] Anna Streżyńska. Interconnection. *Telecom Forum*, 2, 1999.

[153] Anna Streżyńska. Zasada otwartej sieci. *Telecom Forum*, 1, 1999.

[154] Anna Streżyńska. Dyrektywa o interconnection. *Telecom Forum*, 9, 98.

[155] Swisscom. *Long-run incremental cost (LRIC). Interconnection Price Calculation for 2001*, 2000. `www.swisscom.com/gd/services/wholesale/news/pdf/Lric-en.pdf`.

[156] Rafał Sworowski, Henryk Lasota. Systemy wieloagentowe w prognozowaniu inwestycyjnym w telekomunikacji. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2003.

[157] Jolanta Szydłowska-Krusiec. Telefoniczne centra obsługi - call centers w Polsce - stan obecny i perspektywy rozwoju. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2001.

[158] Mirosław Szymanowski, Liliana Dziuda. Taryfikacja we współczesnych systemach telekomunikacyjnych. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1998.

[159] A. S. Tannenbaum. *Sieci Komputerowe*. Wydawnictwo Nauko Techniczne, Warszawa, 1998.

[160] Eugeniusz Toczyłowski. Optymalizacja w badaniach operacyjnych. Skrypt wykładu, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Warszawa, 1996.

[161] Eugeniusz Toczyłowski. *Optymalizacja procesów rynkowych przy ograniczeniach*. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 2002.

[162] Artur Tomaszewski. *Analiza i projektowanie elastycznie zabezpieczanych sieci telekomunikacyjnych*. Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Telekomunikacji, Warszawa, 1993.

[163] Wiesław Traczyk, i in. *Problemy Sztucznej Inteligencji*. Wiedza i Życie, Warszawa, 1995.

[164] Jan Turyna, Beata Pułaska-Turyna. *Rachunek kosztów i wyników*. Finans Servis, Warszawa, 1996.

[165] Eric Tyson. Cost allocation for the determination of interconnection charges. *The fourth conference on International and Polish Experiences on Interconnetion Issues*, Warsaw, 2000. National Institute of Telecommunications.

[166] Barbara Uklańska. Współpraca międzyoperatorska w sieciach dostępowych na przykładzie regulacji Unii Europejskiej. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1999.

[167] Barbara Uklańska. Dostęp bezpośredni do linii abonenckich operatora dominującego w świetle regulacji Unii Europejskiej. *Telekomunikacja i Techniki Informacyjne*, 3-4, 2000.

[168] Barbara Uklańska. Konkurencja w sieciach dostępowych w krajach Unii Europejskiej. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2000.

[169] Barbara Uklańska. Internetowe aspekty programu eEurope. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 2001.

[170] Adam Urbanek. Operatorzy niezależni?, 2001. `www.networld.pl/artykuly/21062.html`.

[171] URT. *Raport o poziomie jakości usług telefonicznych w 2000 roku*. `www.urt.gov.pl`.

[172] URT. *Raport o poziomie jakości usług telefonicznych w 2001 roku*. `www.urt.gov.pl`.

[173] URT. *Stanowisko Prezesa Urzędu Regulacji Telekomunikacji w sprawie modelu i stawek rozliczeń międzyoperatorskich*, 2001. www.urt.gov.pl.

[174] URT. *Stanowisko Prezesa Urzędu Regulacji Telekomunikacji w sprawie modelu rozliczeń między operatorami sieci telefonicznych a dostawcami usług internetowych*, 2001. www.urt.gov.pl.

[175] URT. *Porównanie cen usług telekomunikacyjnych w Polsce i w krajach Unii Europejskiej*, 2002. Materiał URT zaprezentowany na posiedzeniu sejmowej Komisji Infrastruktury w dniu 12.03.2002 r., www.urt.gov.pl.

[176] William Ury. *Odchodząc od NIE - negocjowanie od konfrontacji do kooperacji*. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa, 2000.

[177] Krzysztof Wajda. *Sieci szerokopasmowe*. Wydawnictwo Fundacji Postępu Telekomunikacji, Kraków, 1994.

[178] Andrzej P. Wierzbicki. Sztuka i techniki negocjacji. Skrypt wykładu, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Warszawa, 1996.

[179] Andrzej P. Wierzbicki. Strategia badawcza telekomunikacji polskiej na progu cywilizacji informacyjnej. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1997.

[180] Andrzej P. Wierzbicki. Teoria i sztuka negocjacji a problemy współpracy międzyoperatorskiej. *The first conference on International Experiences on Interconnection Issues*, Warszawa, 1997. Instytut Łączności.

[181] Andrzej P. Wierzbicki. Reference point methods in vector optimization and decision support. Interim Report IR-98-017, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria, 1998.

[182] Andrzej P. Wierzbicki. Optymalizacja i wspomaganie decycji. Skrypt wykładu, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Warszawa, 2000.

[183] Andrzej P. Wierzbicki, Marek Makowski. Multi-objective optimization in negotiation support. Raport Instytutowy, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria, 1992.

[184] Wissenschaftliches Institut für Kommunikationsdienste GmbH. *An Analytical Cost Model for the Local Network*, 4 March 1998. Consultative Document prepared by WIK for the Regulatory Authority for Telecommunications and Posts.

[185] Jakub Witkowski, Woźniak Adam. Metody aproksymacji zbioru parety. Raport istytutowy, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Warszawa, 2000.

[186] Dorota Wojciechowska. Rola regulatora w kształtowaniu rozliczeń międzyoperatorskich w świetle nowego prawa telekomunikacyjnego. *Czwarta konferencja na temat: Międzynarodowe i polskie doświadczenia w zakresie połączeń międzyoperatorskich*, Warszawa, 2000. Instytut Łączności.

[187] Iwona L. Wojcka. Sektor telekomunikacyjny w UE - dostosowania strony polskiej. `www.geoland.pl/dodatki/lacznosc_vi/artykul_27.html`.

[188] Ewa Wolfke, Jan Karasek. Usługa telekomunikacyjna - towar czy dobro społeczne? *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1997.

[189] Chris Woolford. Polish telekomunication policy from the european perspective. *The fourth concerence on International and Polish Experiences on Interconnetion Issues*, Warsaw, 2000. National Institute of Telecommunications.

[190] Nikołaj. N. Worobiew, Edward Kofler, Henryk Greniewski. *Strategia gier.* Książka i Wiedza, Warszawa, 1969.

[191] Glenn A. Woroch. Local network competition. *Handbook of Telecommunications Economics*, rozdzia/l 15. Cave and Majumdar and Vogelsang, 2002. `http://emlab.berkeley.edu./users/woroch/`.

[192] Kornel Wydro. Telekomunikacyjne agencje regulacyjne. *Telekomunikacja i Techniki Informacyjne*, 3-4, 2000.

[193] Kornel B. Wydro. Polska perspektywa społeczeństwa informacyjnego. *Krajowe Sympozjum Telekomunikacyjne*, Bydgoszcz, 1997.

[194] Krzysztof Zalewski. Harmonizacja polskiego prawa telekomunikacyjnego z regulacjami Unii Europejskiej. *Euro Forum, Polish Telecoms*, 1998.

[195] Łukasz Zalicki, Marek Donnelly. Rola interconnect w liberalizacji polskiego sektora telekomunikacyjnego. *Euro Forum, Polish Telecoms*, 1998.

[196] Anna Zarębska. *Poradnik dla eksporterów*, rozdzia/l Techniki prowadzenia negocjacji w kontekście handlu międzynarodowego. Lubelska Fundacja Rozwoju - Euro Info Centre PL416. www.ifr.lublin.pl/poradnik_dla_eksporterow.pdf.

[197] Jolanta Zbiorczyk. Kalkulacja kosztów usługi powszechnej i interconectu w TP S.A. *Czwarta konferencja na temat: Międzynarodowe i polskie doświadczenia w zakresie połączeń międzyoperatorskich*, Warszawa, 2000. Instytut Łączności.